

" ÜBER DIE EINTEILCHEN-STRAHLUNGSÜBERGÄNGE  
IM OPTISCHEN MODELL DES ATOMKERNS "

Kant Urankar

=

1963



" Über die Einteilchen-Strahlungsübergänge  
im optischen Modell des Atomkerns "

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung der Doktorwürde  
der Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von  
Kant Urankar

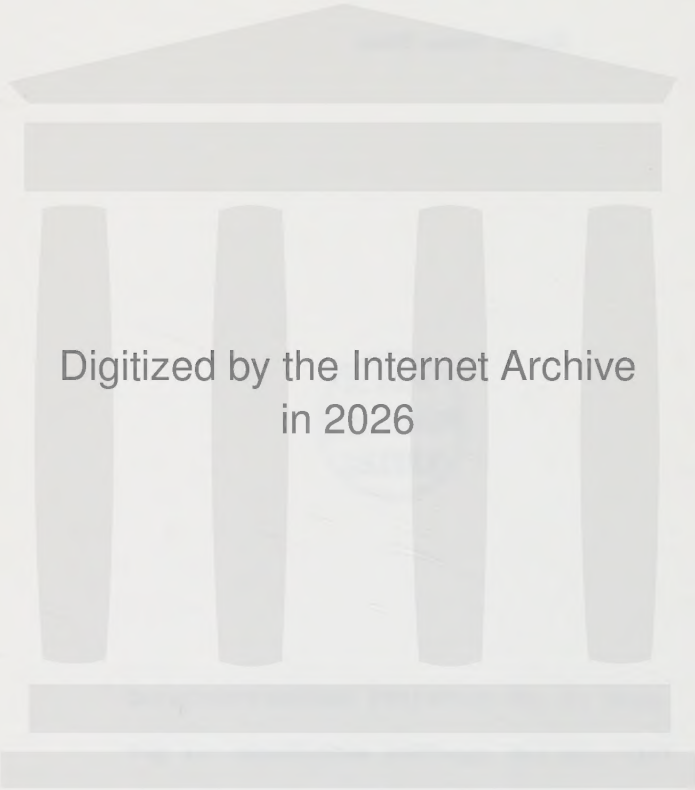
München, im Februar 1963.



Berichterstatter: Professor Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: Mai 22, 1963





Digitized by the Internet Archive  
in 2026

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Einleitung                                                       | 1  |
| 2. Die Theorie der Einteilchen-Übergänge                            |    |
| 2.1 Die Übergangswahrscheinlichkeiten                               | 7  |
| 2.2 Die Wellenfunktionen                                            |    |
| 2.2.1 Der Anfangszustand                                            | 9  |
| 2.2.2 Der Endzustand                                                | 12 |
| 2.3 Die Wirkungsquerschnitte                                        | 17 |
| 3. Die Berechnung der Wellenfunktionen<br>nach dem W.K.B. Verfahren | 22 |
| 4. Numerische Ergebnisse                                            | 32 |
| 5. Vergleich mit den Experimenten<br>und Diskussion                 | 40 |
| 6. Literaturverzeichnis                                             | 44 |
| 7. Tabellen und Figuren                                             | 46 |



## 1. Einleitung

Die Erklärung der experimentellen Ergebnisse für Strahlungsreaktionen im Bereich mittlerer Energien (etwa 5 bis 22 MeV) auf Grund des Compound-Kern-Modells<sup>1)</sup> stösst auf Schwierigkeiten.<sup>2,3,4)</sup> Bei niedrigen Energien (unter etwa 4 MeV) verläuft die Strahlungsreaktion höchstwahrscheinlich über Bildung und anschliessenden Zerfall des Compoundkerns. Beweis dafür sind die grossen Wirkungsquerschnitte für Resonanzeinfang bei niedrigen Energien.<sup>5)</sup> Für höhere Energien aber sollte man eine starke Verminderung des Einfangsquerschnitts erwarten. Während nämlich nach der Compound-Kerntheorie die Energiebreite für Teilchenemission mit steigender Beschussenergie annähernd exponentiell steigt, nimmt die Energiebreite für Gammastrahlung nur mit der 3ten Potenz zu.<sup>2)</sup> Es müsste also das Verhältnis von Gamma- zu Teilchenemission mit zunehmender Beschussenergie rapid abnehmen.

In Tabelle 2 haben wir die experimentellen Ergebnisse für Einfangsreaktionen ( $p, \gamma$ ) von Elementen zwischen  $\text{Li}^7$  und  $\text{Bi}^{209}$  bei Einfallsennergien von 5 bis 22,5 MeV zusammengestellt.<sup>2, 6, 7)</sup> Die verschiedenen Messergebnisse für Proton<sup>an</sup>-Einfang <sup>bei</sup> für Beschussenergien unter 2 MeV sind hier nicht berücksichtigt, weil diese mit der Compound-Kern-Theorie qualitativ übereinstimmen. Die Messungen aus der Tabelle 2, besonders die von Cohen<sup>2)</sup> und Kelly<sup>6)</sup>, zeigen, dass die Wirkungsquerschnitte mit steigender Beschussenergie und Massenzahl fast konstant bleiben. So ist zum Beispiel für  $\text{Ni}^{60}$  das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte

bei 10 und 22,5 MeV etwa 1,3 während es nach der Compound-Kern-Theorie 100 betragen sollte. Bei  $\text{Bi}^{209}$  ist das Verhältnis nach der Theorie  $10^5$ , dagegen der experimentelle Wert nur 6,7 (s. Tab. 2).

Ähnliche Abweichungen treten auch bei der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Ordnungszahl auf. So sollte das Verhältnis der Gamma- zur Teilchenemission für Wismuth mindestens 1000 mal kleiner sein als für Kohlenstoff, es ist aber nur 10 mal kleiner.

Gugelot<sup>3)</sup> hat die Energieverteilung der ausgesandten Gammastrahlung der Reaktion  $\text{Cu}(p, \gamma)\text{Zn}$  bei einer Einfallensenergie von 18 MeV bestimmt. Seine Ergebnisse zeigen, dass die spektrale Verteilung der Gammastrahlung mit zunehmender Gammaenergie steil abnimmt. Das energiereiche Ende der Kurve zeigt einen Verlauf der einem Bremsstrahlungsspektrum ähnlich ist (s. Fig. 2).

Beck<sup>4)</sup> hat vorgeschlagen, diese Reaktion auf phänomenologischer Basis mit Hilfe des optischen Modells<sup>8)</sup> zu erklären. Nach diesem Modell soll ein einfallendes Teilchen einen beträchtlichen Weg im Targetkern zurücklegen, bevor ein Compoundkern gebildet wird. Während der anfänglichen freien Bewegung im mittleren Kernpotentialfeld, kann das Teilchen Energie in Form eines Photons emittieren und geht erst danach in den gebundenen Zustand über. Dies ist möglich, weil die mittlere freie Weglänge eines einlaufenden Nukleons in der Kernmaterie einige Kernradien beträgt<sup>9)</sup>. Zum Beispiel legt ein Proton bei 17 MeV Einfallensenergie einen freien Weg von etwa  $4 \cdot 10^{-13}$  cm in der Kernmaterie zurück.

Man nennt diesen Vorgang Einstufenprozess, um ihn vom Compoundkernprozess zu unterscheiden, der ein "delayed" oder Zweistufenprozess ist.

Kursunoglu<sup>10)</sup> hat die Übergänge ins Kontinuum (Kernbremstrahlung) nach dem optischen Modell untersucht, jedoch ohne numerische Ergebnisse anzugeben. Lane und Lynn<sup>11)</sup> haben versucht, Neutroneneinfangsquerschnitte für schwere Kerne (schwerer als Pb) bei Einfallssenergien von 14 MeV abzuschätzen. Sie errechnen 0,7 mb für den Einfangsquerschnitt, während die experimentellen Werte um 3 mb liegen. Der nach der Compound-Kern-Theorie berechnete Wert liegt um einen Faktor  $10^4$  tiefer. Die Winkelverteilungsfunktion ist jedoch bei diesen Autoren nicht berücksichtigt. Es zeigt sich aber, dass die Einfangsquerschnitte merklich von der Emissionsrichtung der Photonen abhängen. Nach unseren Rechnungen führt die Vernachlässigung der Winkelverteilungsfunktion zu einem etwa dreifach ~~und~~<sup>zu</sup> hohen Wert. Die differentiellen Wirkungsquerschnitte der übrigen direkten Reaktionen (z. B. Surface Reactions, Stripping Reactions etc.) zeigen eine ähnliche starke Abhängigkeit von der Emissionsrichtung der Reaktionsprodukte<sup>12)</sup>.

Quantitative Ausdrücke für die Neutronen-Einfangsreaktion  $\text{Cu}^{61} (n, \gamma) \text{Cu}^{62}$  im Rahmen dieses Einstufenprozesses wurden von Beck<sup>13)</sup> entwickelt, um eine möglichst genaue Anpassung an die Einfangsquerschnitte im Bereich hoher Energien bis 22 MeV der Reaktion  $\text{Ni}^{60} (p, \gamma) \text{Cu}^{61}$  zu erhalten. Er berechnete den inneren Beitrag (im Bereich  $r \leq R$ ,  $R$ =Kernradius) zu den Übergangsmatrixelementen für Einteilchenübergänge bei 20 MeV und erhielt für den Wirkungsquerschnitt 0,25 mb, während der experimentelle Wert 0,8 mb beträgt. Nach der Compoundkerntheorie dagegen, erhielt er einen Wert, der etwa hundertmal kleiner als der gemessene ist.

Im folgenden entwickeln wir Ausdrücke für Wirkungsquerschnitte bei Protoneneinfang, wobei wir auch den Coulombanteil der Wechselwirkung berücksichtigen. Dazu bestimmen wir die Coulombwellenfunktionen nach dem W.K.B. Verfahren<sup>14)</sup>.

Im Kerninneren beschreiben wir die Wechselwirkung durch einen komplexen Potentialtopf. Eine unerwünschte Eigenschaft eines solchen Potentialtopfs ist die scharfe Diskontinuität am Kernrand. Diese verursacht eine zu grosse Reflexion und eine zu kleine Durchdringung aller Drehimpulszustände des Protons, wodurch der Anteil der Gammastrahlung erheblich vermindert wird. Die Verwendung dieses Kastenpotentials an Stelle des mehr der Wirklichkeit entsprechenden Wood-Saxonschen Potentials<sup>15)</sup> ist durch rechentechnische Gründe bedingt. Den Imaginärteil des Potentials nehmen wir als von der Beschussenergie abhängig an, was sich auch in der Theorie der elastischen Streuung als notwendig erwiesen hat<sup>9)</sup>.

Mit Hilfe der "distorted wave approximation"<sup>16)</sup>, die verschiedene Autoren<sup>12, 17)</sup> zur Beschreibung der direkten Reaktionen verwendet haben, berechnen wir den Wirkungsquerschnitt für die Strahlungsreaktion. Diese Methode berücksichtigt die Verzerrung der ein- und auslaufenden Wellen durch das Streupotential und wird verwendet, wenn die Einfallenergie nicht gross gegenüber dem Streupotential ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeit wird in der ersten störungstheoretischen Näherung bestimmt, wobei die Ankopplung der Nukleonen an das Strahlungsfeld als Störung betrachtet wird.

Mit Hilfe dieser Methode berechnen wir die Strahlungsquerschnitte der Reaktion  $\text{Ni}^{60} (p, \gamma) \text{Cu}^{61}$  im Beschussenergiebereich von 10 bis 20 MeV. In Fig. 7 haben wir die berechneten so wie die gemessenen Wirkungsquerschnitte als Funktion der Einfallenergie aufgetragen. Ferner eingetragen ist der Beitrag der Compoundstrahlung nach den Abschätzungen von Beck<sup>13)</sup>. Der gesamte Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann durch die einfache Summation der beiden. Wie man hier deutlich sieht, spielt der Compoundanteil von der Beschussenergie 15 MeV an keine merkbare Rolle mehr. Der rasche Abfall der Compoundstrahlung mit zunehmender Einfallenergie wird von dem Einzelteilchenbeitrag kompensiert. Die so erhaltene theoretische Werte für die Wirkungsquerschnitte liegen jedoch um etwa einen Faktor 3 tiefer als die gemessenen.

Die Untersuchung der Übergangsmatrikелеlemente zeigt, dass ein grosser Beitrag zu den Einfangsquerschnitten vom Integrationsbereich ausserhalb des Kerns herrührt. Zum Vergleichszweck haben wir die Beiträge dieser Übergangsmatrikелеlemente bei Protonen-Einfang der Reaktion  $\text{Ni}^{60} (p, \gamma) \text{Cu}^{61}$  im Aussen- so wie im Innenbereich für Beschussenergien 10, 14, 20 MeV tabelliert (s. Tab. 9, 10 und 11). Das Verhältnis vom inneren zum äusseren Beitrag zeigt, dass ein grosser Teil des beobachteten Einfangsquerschnitts für Beschussenergien über einige MeV vom äusseren Beitrag herrührt. Bei Einfallenergien von 20 MeV beträgt der innere Beitrag nur noch etwa 0,1 mb d. h. etwa ein Drittel des berechneten Wertes.

Ferner sei noch darauf hingewiesen, dass der Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit nach der Blatt-Weisskopfschen klassischen Strahlungstheorie<sup>18)</sup>, den wir hier verwenden, dann gültig ist, wenn die lineare Dimension der Strahlungsquelle klein gegenüber der Strahlungswellenlänge ist. Diese Bedingung ist für den hier betrachteten Kern und dessen Gamma-Energien nicht

ganz erfüllt. Für den Kern  $\text{Cu}^{61}$  verursacht diese Näherung einen Fehler von etwa 20% im massgebenden Bereich des äusseren Beitrags. Das bedeutet, dass die hier gemachte Untersuchung und deren Ergebnisse nur für leichte und mittelschwere Kerne gelten.

Für die Untersuchung der Strahlungsübergänge der schweren Kerne muss man die strengere Form der Blatt-Weisskopfschen klassischen Strahlungstheorie verwenden. Lane und Lynn<sup>11)</sup> haben jedoch bei ihren Abschätzungen für Kerne schwerer als Pb die annähernde Form der Blatt-Weisskopfschen Theorie benützt. Diese verursacht im massgebenden Bereich des äusseren Beitrags eine Abweichung von mehr als 50%. Diese Abweichungen führen ihrerseits zu grossen Ungenauigkeiten in den Berechnungen des Einfangswirkungsquerschnitts.

## 2. Die Theorie der Einteilchen-Übergänge

### 2. 1. Übergangswahrscheinlichkeit.

Im folgenden werden wir die Übergangsmatrixelemente nur unter Berücksichtigung der elektrischen Dipolstrahlung berechnen. Bei mittelschweren Kernen und mittleren Energien gelten nämlich folgende Abschätzungen<sup>18)</sup>: Das Verhältnis von magnetischen zu elektrischen Dipolmoment hat die Grössenordnung  $\mathcal{V}/c$  und ist in unserem Fall etwa  $10^{-1}$ . Ferner ist das Verhältnis vom elektrischen Quadrupol- zu Dipolmoment von der Grössenordnung  $\kappa R$  ( $\kappa$  = Wellenzahl des ausgestrahlten Lichtquants und  $R$  = Kernradius), was für hier betrachteten Kern etwa 0,5 ist. Da die Multipolmomente in die Übergangswahrscheinlichkeit quadratisch auftreten, wird die Vernachlässigung magnetischer und höherer elektrischer Multipolstrahlung etwa einen Fehler von der Grösse 20 - 30 % ausmachen. Dieser Fehler spielt gegenüber den übrigen vereinfachenden Annahmen in den Rechnungen unseres Modells jedoch keine wesentliche Rolle, da sich die berechneten Wirkungsquerschnitte von den gemessenen schon um einen Faktor 3 - 4 unterscheiden.

Nach der Blatt-Weisskopfschen klassischen Strahlungstheorie<sup>18)</sup> lässt sich die Übergangswahrscheinlichkeit für Dipolstrahlung in folgender Weise schreiben:

$$\omega_{fi} = \frac{16\pi}{9} \cdot \frac{\kappa^3}{\hbar} \sum_{m=-1}^{+1} Z_{1,m}(\alpha\gamma) Q_{1,m} \frac{dn}{dE_p} \quad (2.1)$$

$\kappa$  ist die Wellenzahl des emittierten Photons ( $\kappa = \omega/c$ ) und  $dn/dE_p$  gibt die Dichte der Protonen-Endzustände an. Die Raumwinkelverteilungsfunktion  $Z_{1,m}(\alpha\gamma)$  der ausgestrahlten Gamma-Energie ist definiert durch

$$\begin{aligned} Z_{i,m}(\Omega) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{m(m-1)}{l(l+1)} \right] \left| Y_{l,m-1} \right|^2 + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{m(m+1)}{l(l+1)} \right] \left| Y_{l,m+1} \right|^2 \\ + \frac{m^2}{l(l+1)} \left| Y_{l,m} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei  $Y_{l,m}$  die gewöhnlichen Kugelfunktionen sind mit der Normierung

$$\int Y_{l,m}^* Y_{l',m'} d\Omega = \delta_{m,m'} \delta_{l,l'}$$

Das Matricelement des elektrischen Dipol-Operators für den Übergang  $i \rightarrow f$  ist gegeben durch

$$Q_{i,m} = e_{\text{eff}} \int \psi_f^*(r, \vartheta, \varphi) \cdot r Y_{1,m}^*(\vartheta, \varphi) \psi_i(r, \vartheta, \varphi) d\tau \quad (2.3)$$

$\psi_i$  und  $\psi_f$  sind die Wellenfunktionen für Anfang- und Endzustand. Mit  $r, \vartheta$  und  $\varphi$  bezeichnen wir die Relativkoordinaten vom einfallendem Proton und Kern, wobei wir die Polarachse parallel zu der Einfallsrichtung wählen.

Da wir den Rückstoß des Kerns nach der Emission des Gammaquants vernachlässigen, wird der Schwerpunkt aller Nukleonen eine Konstante der Bewegung. Der Dipol-Operator lässt sich dann als Funktion der Koordinate des einfallenden Protons allein ausdrücken. Diesem ist dann eine effektive Ladung

$$e_{\text{eff}} = e \left( 1 - \frac{Z}{A} \right)$$

zuzuschreiben.<sup>18)</sup>

## 2. 2. Die Wellenfunktionen.

Die stationären Zustände des Protons, die in der Gl (2.3) auftreten, sind Lösungen der Einteilchen-Schrödinger-Gleichung im Schwerpunktsystem mit den für das Streuproblem geltenden Randbedingungen. Die Wechselwirkung ausserhalb des Kerns ist durch das Coulomb-Potential beschrieben.

$$V_c(r) = Ze^2/r \quad (r \geq R) \quad (2.4)$$

Ze dabei, ist die Ladung des Targetkerns. Innerhalb des Kerns bewegt sich das an der Reaktion beteiligte Proton nach dem optischen Modell<sup>8)</sup> in einem Kastenpotential

$$V(r) = -V_0(1+i\zeta) \quad (r \leq R) \quad (2.5)$$

Der reelle Teil der Kernwechselwirkung ist nur wenig von der Beschussenergie abhängig. Wir beschreiben ihn daher durch einen festen energieunabhängigen Mittelwert  $V_0$ . Der Parameter  $\zeta$ , der den Imaginärteil des Potentials bestimmt, ist stärker energieabhängig und nimmt mit steigender Energie zu<sup>15)</sup>.

### 2. 2. 1. Der Anfangszustand

Im Anfangszustand wird das Streuproblem durch die Wellenfunktion  $\psi_i(r, \vartheta, \varphi)$  beschrieben. Ausserhalb des Kerns ( $r \geq R$ ,  $R$  = Kernradius) ist die Lösung eine ebene Welle (auf eins normiert) plus eine auslaufende Kugelwelle (von der elastischen Streuung herrührend). Wird  $\vartheta$  gegen die Einfallrichtung gemessen, so tritt eine Abhängigkeit vom azimutalen Winkel  $\varphi$  aus Symmetriegrün-

den nicht auf. Entwickeln wir den Anfangszustand nach Kugelwellen und führen wir die dimensionslose Variable  $\xi = r/R$  ein, so nimmt die Wellenfunktion folgende Gestalt an:

$$\psi_i(s, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \frac{\chi_l(A; \xi)}{A; \xi} Y_{l,0}(\vartheta) \quad (2.6)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \beta_l &= i^{l+1} \pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{2l+1}, & A_i &= k_i R, \\ \chi_l(A; \xi) &= (\chi_l^- - \eta_l \chi_l^+), & k_i^2 &= \frac{2\mu E_i}{\hbar^2}, \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$E_i$  = Einfallensenergie,

$\mu$  = Reduzierte Masse.

Die komplexe Zahl  $\eta_l$  ist die Amplitude der auslaufenden Welle mit Drehimpuls  $l$  und bestimmt sich aus den Grenzbedingungen an der Kernoberfläche ( $\xi = 1$ ). Man kann  $\eta_l$  durch die am Kernrand berechnete logarithmische Ableitung von  $\chi$  innen und  $\chi_{\text{aus}}^+ = \chi_{\text{aus}}^{-*}$  und durch die Phase von  $\chi_l^-|_{\xi=1}$  ausdrücken<sup>18)</sup>.

$r, \vartheta$  und  $\varphi$  sind die Relativkoordinaten des einlaufenden Protons und des Kerns.

Die ein- und auslaufenden Radial-Wellenfunktionen  $\chi_l^{\mp}$  sind die Funktionen, die zur reinen Coulomb-Streuung gehören. Da sich mit den grundsätzlich bekannten exakten Lösungen numerisch nur schwer rechnen läßt, werden wir im Abschnitt (3) die  $\chi_l^{\mp}$  näherungsweise nach dem W.K.B. Verfahren<sup>14)</sup> berechnen. Hier geben wir nur das Ergebnis an

$$\chi_l^{\mp} = \frac{1}{2} (F_l \mp i G_l) \cdot \exp \left[ \pm i \left( \delta_l + \frac{1}{2} l \pi \right) \right] \quad (2.7)$$

wobei

$$F_l^I = p_l^{-1/2} \exp \left[ -A_l \int_{\xi}^{\xi_l} p_l d\xi \right], \quad G_l^I = p_l^{-1/2} \exp \left[ +A_l \int_{\xi}^{\xi_l} p_l d\xi \right] \quad (2.7a)$$

und

$$F_l^{II} = 2 p_l^{-1/2} \cos \left[ A_l \int_{\xi_l}^{\xi} p_l d\xi - \frac{\pi}{4} \right], \quad G_l^{II} = 2 p_l^{-1/2} \sin \left[ A_l \int_{\xi_l}^{\xi} p_l d\xi - \frac{\pi}{4} \right] \quad (2.7b)$$

mit den Abkürzungen

$$p_l = \sqrt{|1 - U_l(\xi)|}, \quad U_l(\xi) = \frac{1}{\xi} \left( \frac{ze^2}{R} \right) \frac{1}{E_i} + \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{h^2}{2\mu R^2} \right) \frac{l(l+1)}{E_i} \quad (2.7c)$$

Die  $\chi_l^{\mp}$  mit Index I und II sind die den Gebieten I und II (vgl. Fig. 1, S. 24), d. h. links und rechts des klassischen Umkehrpunktes (der sich aus  $1 - U_l(\xi) = 0$  berechnen lässt) für jedes  $l$  zugeordneten Lösungen. Die gewöhnliche Coulomb-Phase bezeichnen wir mit  $\delta_l$ . Nach Abschnitt (3) gilt dann

$$\delta_l = \sqrt{l(l+1)} \left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + l(l+1)}} - \frac{\pi}{2} \right] + x \left( \ln \sqrt{x^2 + l(l+1)} - \right. \\ \left. -1 \right) + \frac{\pi}{4}$$

Im Kerninneren machen wir eine ähnliche Entwicklung nach Partialwellen. Dann nimmt die Wellenfunktion folgende Gestalt an:

$$\psi_i(\varrho, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^i \frac{\phi_l(B_i \varrho)}{B_i \varrho} Y_{l,0}(\vartheta), \quad (\varrho \leq 1) \quad (2.8)$$

wobei nur sphärische Bessel-Funktionen zugelassen sind, da nur für ein bei  $\varrho = 0$  verschwindendes  $\phi_l(B_i \varrho)$  das entsprechende  $\psi_i(\varrho, \vartheta)$  eine reguläre Lösung der ursprünglichen Schrödinger-Gleichung wird. Also schreiben wir

$$\phi_l(B_i \varrho) = B_i \varrho \cdot j_l(B_i \varrho), \quad (\varrho \leq 1) \quad (2.8a)$$

mit

$$B_i = K_i R; \quad \varrho = \frac{r}{R}; \quad K_i^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} [E_i + V_0(1+i\vartheta)] \quad (2.8b)$$

Die Konstante  $\alpha_l^i$  lässt sich aus den Grenzbedingungen an der Kernoberfläche bestimmen.

### 2.2.2. Der Endzustand

Bei der Berechnung der Wellenfunktionen des Endzustandes haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) Übergänge ins Kontinuum (Protonen-Endenergie  $E_f > 0$ ).  
 In diesem Fall ist das Proton entweder in der Lage den Kern wieder zu verlassen, wie es in dem Reaktionstyp  $(p; \gamma, p)$  der Fall ist, oder durch weitere Gamma-Ausstrahlungen in den Grundzustand überzugehen. Bei Endenergien  $E_f \leq 1/2 E_i$  nach dem ersten Übergang kommt je-

doch wegen der Coulomb-Barriere nur noch die zweite Möglichkeit in Betracht. Solche Folgeprozesse aber werden wir vernachlässigen.

- b) Übergänge in gebundene Zustände ( $-E_B \leq E_f \leq 0$ ,  $E_B =$  Bindungsenergie,  $E_f =$  Protonen-Endenergie).

Hier können ebenfalls Kaskadenprozesse vorkommen, falls der Grundzustand nach der ersten Gamma-Ausstrahlung nicht erreicht wird. Diese sekundäre Strahlung trägt, wenn die Energie des ersten Quants in dem Intervall  $E_i + E_B \geq E_f > 1/2 (E_i + E_B)$ , (wobei  $E_i + E_B = E_{\gamma \text{ max}}$ ) liegt, zum oberen Ende des Spektrums nicht bei. Ist die Energie des ersten Gamma-Quants kleiner als es diesem Intervall entspricht, so wird die Emissionswahrscheinlichkeit der sekundären Gammastrahlung gegenüber der stark begünstigten Teilchenemissionswahrscheinlichkeit vernachlässigbar<sup>2)</sup>.

Für den Übergang zum Kontinuum werden das einlaufende Nukleon und der Kern als spinlose Teilchen behandelt. Auf die Matrixelemente hat das keinen merklichen Einfluss, da die magnetische Spinstrahlung im allgemeinen von der Größenordnung der magnetischen Bahnstrahlung ist und deswegen vernachlässigt werden kann<sup>18)</sup>.

Die Wellenfunktion für diese Übergänge ist durch ähnliche Entwicklung wie in den Gln. (6) und (8) gegeben, wobei jedoch hier der Ausbreitungsvektor der ebenen Welle gegenüber dem Anfangszustand in eine andere Richtung weisen kann. Ferner enthält die Wellenfunktion jetzt eine auslaufende ebene Welle und eine einlaufende Kugelwelle<sup>19)</sup>. Mit  $\mathcal{J}'$  und  $\varphi'$  als Polarkoordinaten im Bezug auf die neue Ausbreitungsrichtung wird.

$$\psi_f(s, \vartheta') = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l^f \frac{\chi_l^*(A_f s)}{A_f s} Y_{l,0}(\vartheta'), \quad (s \geq 1) \quad (2.9)$$

mit  $\beta_l^f = \beta_l^*$  und

$$\psi_f(s, \vartheta') = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^f \frac{\mathcal{F}_l^*(B_f s)}{B_f s} Y_{l,0}(\vartheta'), \quad (s \leq 1) \quad (2.10)$$

Die  $\chi_l$  und  $\mathcal{F}_l$  bestimmen sich in der gleichen Weise wie die Anfangszustände aus Gln. (2.7) und (2.8a). Die  $\alpha_l^f$  bestimmt man analog zu den  $\alpha_l^l$

Die Wellenfunktionen (2.9) und (2.10) kann man mit Hilfe des Additionstheorems der sphärischen Kugelfunktionen in den Koordinaten des Anfangszustandes ausdrücken<sup>20)</sup>. Nach diesem Theorem ist

$$Y_{l,0}(\vartheta') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \quad (2.11)$$

Setzt man diesen Ausdruck oben in den Gln. (2.9) und (2.10), so bekommt man

$$\psi_f(s, \vartheta, \varphi; \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left[ \begin{array}{c} \beta_l^* \frac{\chi_l^*(A_f s)}{A_f s} \\ \alpha_l^* \frac{\mathcal{F}_l^*(B_f s)}{B_f s} \end{array} \right] \cdot \quad \begin{array}{l} (s \geq 1) \\ (s \leq 1) \end{array}$$

$$Y_{l,m}^*(\theta, \phi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) \quad (2.12)$$

$\Theta$  und  $\phi$  charakterisieren den Raumwinkel, in den das Proton bei der Ausstrahlung gestreut wird.

Im zweiten Fall ( $E_f \leq 0$ ) gehören die Endzustände des Protons zum diskreten Energiespektrum. Nach dem Schalenmodell<sup>21)</sup> bewirkt die Spin-Bahnkopplung eine Aufspaltung der Zustände von verschiedenen Gesamtdrehimpulsen mit gleicher Hauptquantenzahl  $n$ , je nach dem ob die Orientierung des Spins zum Bahndrehimpuls parallel oder antiparallel ist. Um in unserem Fall die Wellenfunktionen zu gewinnen, bestimmen wir die Eigenzustände in einem Potentialkasten, gegeben durch die Gl. (2.5) mit  $\zeta = 0$ , was jedoch nicht die richtigen Schalen-Modell-Eigenwerte liefert. Die Dipolmatrixelemente sind, wie sich im folgenden herausstellen wird, nicht sehr stark energieabhängig. Deswegen genügt es, die Korrektur für die Energieeigenwerte allein in den energieabhängigen Faktoren, die in Gl. (2. 1) neben den Matrixelementen auftreten, vorzunehmen.

Somit erhalten wir die Wellenfunktionen für die Übergänge in die diskreten Zustände:

$$\psi_f^{n,l} = \frac{\Phi_{n,l}(B_f s)}{B_f^{n,l} s} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi), \quad (s \leq 1) \quad (2.13a)$$

mit

$$\Phi_{n,l}(B_f s) = C_l B_f^{n,l} s j_l(B_f s) \quad (2.13b)$$

Die  $B_f^{n,l}$  hängen mit den diskreten Energieeigenwerten  $E_{n,l}$  durch die folgende Beziehung zusammen:

$$B^{n,l} = \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - |E|) \right]^{1/2} R$$

wobei  $V_0$  die Tiefe und  $\xi = 1$  die Reichweite des Kastenpotentials ist.

Im Aussenbereich muss die Lösung exponential abfallen. Den oben geschilderten Überlegungen nach, lautet die Lösung

$$\psi_f^{n,l} = \frac{\chi_{n,l}(A_f^{n,l} \xi)}{A_f^{n,l} \xi} Y_{l,m}(\vartheta, \varphi), \quad (\xi > 1) \quad (2.14a)$$

mit

$$\chi_{n,l}(A_f^{n,l} \xi) = D_l |p_l|^{-1/2} \exp \left[ -A_f^{n,l} \int_1^\xi p_l d\xi \right] \quad (2.14b)$$

Die Eigenwerte  $B_f^{n,l}$  und  $A_f^{n,l}$  bestimmen sich aus den Randbedingungen.  $C_1$  ist die Normierungskonstante und ist durch die Normierungsbedingung festgelegt. Dabei führen wir für die Rechnungen die folgende Näherung ein

$$\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} [j_l(B_f^{n,l} \xi)]^2 \xi^2 d\xi \approx 1/(B_f^{n,l})^2 \quad (2.13c)$$

Die Konstante  $D_l$  ist durch die Stetigkeitsbedingung bestimmt. Nach dieser Bedingung lautet das Verhältniss

$$D_l/C_l = \left[ \frac{A_f^{n,l} j_l(B_f^{n,l} \xi)}{|p_l|^{-1/2} \exp(-A_f^{n,l} \int_1^\xi p_l d\xi)} \right]_{\xi=1} \quad (2.14c)$$

### 2. 3. Die Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte

Der Wirkungsquerschnitt hängt mit der Übergangswahrscheinlichkeit durch die folgende Beziehung zusammen:

$$\sigma_{fi} = \omega_{fi} / (\tilde{\xi} v^{\text{rel}})_i \quad (2.15)$$

Dabei ist  $(\tilde{\xi} v^{\text{rel}})_i$  die Teilchenstromdichte der einfallenden ebenen Welle, die wir auf  $\tilde{\xi} = 1$  normieren werden. Die Stromdichte ist dann gleich der Relativgeschwindigkeit  $v_i^{\text{rel}}$  zwischen Target und Projektil.

Die in Gl. (2.1) auftretende Dichte der Protonenzustände ist im Falle des Übergangs ins Kontinuum gegeben durch

$$\frac{dn}{dE_p} = \frac{\mu p_f}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega_p$$

$\mu$  und  $P_f$  bezeichnen die reduzierte Masse bzw. den Impulsbetrag des Protons im Endzustand und  $d\Omega_p$  das Raumwinkelelement in das der Ausbreitungsvektor der ebenen Welle im Endzustand weist.

Nun können wir unter Verwendung des Energiesatzes

$$|dE_p|_{E_\gamma = \text{const.}} = |dE_\gamma|_{E_p = \text{const.}}$$

die Zustandsdichte als

$$\frac{dn}{dE_\gamma} = \frac{\mu p_f}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega_p \quad (2.16)$$

schreiben, da uns das Gamma-Spektrum und nicht das Protonen-Spektrum interessiert.

Dann erhalten wir aus den Gln. (2.1), (2.3), (2.14) und (2.15) für die Übergänge ins Kontinuum ( $E_f > 0$ ),

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Omega_f \partial E_f} = \frac{16\pi}{9} \cdot \frac{R^2 x^3}{\hbar v_i^{\text{rel}}} \cdot \frac{\mu p_f}{(2\pi \hbar)^3} \cdot R^5 \cdot e^2 \left(1 - \frac{z}{A}\right)^2 \cdot \sum_{m=-1}^{+1} Z_{1,m}(\Omega_f) \left| \iiint_{\substack{\vartheta=0 \\ \varphi=0}}^{\infty \pi} \int_0^{2\pi} \psi_f^*(s, \vartheta, \varphi, \theta, \phi) \int Y_{1,m}^*(\vartheta, \varphi) \cdot \psi_i(s, \vartheta) s^2 \sin \vartheta ds d\vartheta d\varphi \right|^2 d\Omega_p \quad (2.17)$$

$(\theta, \phi)$  ist der Raumwinkel in den das Proton bei der Ausstrahlung gestreut wird.

Setzen wir hier die Wellenfunktionen  $\psi_i(s, \vartheta)$  und  $\psi_f(s, \vartheta, \varphi, \theta, \phi)$  aus Gln. (2.6), (2.8), (2.12a) und (2.12b) ein und integrieren wir über  $\vartheta$  und  $\varphi$ , so wie über  $\Omega_p$  da wir uns nicht für die Richtung des gestreuten Protons interessieren, dann gelangt man zu folgendem Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{p,f}}{\partial \Omega_f \partial E_f} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{\mu c}{\hbar} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot R^5 \cdot (xR)^3 \left(1 - \frac{z}{A}\right)^2 \cdot \frac{v_f}{v_i^{\text{rel}}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-1}^{+1} Z_{1,m}(\Omega_f) \left| \mathcal{Q}_{1,m}^l \right|^2 \quad (2.18)$$

mit

$$\left| G_{l,m}^l \right|^2 = (2l+1) \left\{ \left[ (2l-1) \cdot V(l-1, 1, l; 0, 0, 0) \cdot V(l-1, 1, l; 0, m, -m) \cdot I^{l, l-1} - (2l+3) \cdot V(l+1, 1, l; 0, 0, 0) \cdot V(l+1, 1, l; 0, m, -m) I^{l, l+1} \right] \right\}^2 \quad (2.18a)$$

und

$$I^{l, l'} = I^{l, l'}(\vartheta \leq 1) + I^{l, l'}(\vartheta \geq 1),$$

$$I^{l, l'}(\vartheta \leq 1) = \tilde{\alpha}_l^+ \tilde{\alpha}_{l'}^{in} \int_0^1 \xi^3 j_l^*(B_f \xi) j_{l'}(B_f \xi) d\xi, \quad (2.18b)$$

$$I^{l, l'}(\vartheta \geq 1) = \frac{1}{A_f^* A_i} \int_1^\infty \xi \chi_l^*(A_f \xi) \chi_{l'}(A_i \xi) d\xi.$$

Die Konstanten  $\tilde{\alpha}_l$  stehen mit den in Gl. (2.8) eingeführten Amplituden  $\alpha_l$  in der Beziehung

$$\alpha_l = i^{l+1} \sqrt{\pi(2l+1)} \tilde{\alpha}_l \quad (2.19)$$

und  $V(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$  sind die von der Winkelintegration her-rührenden Racah-Koeffizienten. Diese stehen mit den Clebsch-Gordon-Koeffizienten in folgender Beziehung<sup>18)</sup>

$$V(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) = (-)^{c-\gamma} (2c+1)^{-1/2} C_{a,b}(c, \gamma, \alpha, \beta) \quad (2.20)$$

wo a und b zwei beliebige Drehimpulse und c einer ihrer Summendreimpulse sind.  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind die entsprechenden Komponenten. V verschwindet falls  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  ist. Die Gl. (2.18) enthält die Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung als Folge der Winkelintegration, und so wird die Doppelsumme  $\sum_{l, l'}$  zu einer einfachen mit  $l = l \pm 1$ .

Im zweiten Fall gehören die Endzustände des Protons zum diskreten Energiespektrum ( $E_f < 0$ ) und so haben wir hier  $dn/dE_f = 1$  zu setzen. Ferner muss der Wirkungsquerschnitt mit einer relativen Wahrscheinlichkeit

$$g(j) = \frac{(2j+1)}{2(2l+1)}$$

multipliziert werden, weil wir den Strom der einlaufenden Teilchen als unpolarisiert betrachten. Da Bahndrehimpuls und Spin zu den beiden Gesamtdrehimpulsen  $j = l \pm \frac{1}{2}$  kombinieren können, ist  $g(j)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das einfallende Proton der Gesamtdrehimpuls  $j$  hat.

Aus Gln. (2.1), (2.3), (2.6), (2.8), (2.13), (2.14) und (2.15) erhalten wir, wieder nach Ausführung der Winkelintegrationen

$$\sigma_{p,\gamma}(E_i, E_n, l, j) = \frac{\pi}{3} \cdot R^5 \cdot (\kappa R)^3 \frac{e^2}{\hbar v_i^{\text{rel}}} \left(1 - \frac{z}{A}\right)^2 \cdot g(j) \sum_{m=-1}^{+1} Z_{1,m}(\Omega_j) \left| Q_{1,m}^l \right|^2 \quad (2.21)$$

mit

$$\left| Q_{1,m}^l \right|^2 = (2l+1) \left| \left\{ (2l-1) V(l-1, 1, l, 0, 0, 0) \cdot V(l-1, 1, l, 0, m, -m) \cdot I^{l, l-1} - (2l-3) \cdot V(l+1, 1, l, 0, 0, 0) \cdot V(l+1, 1, l, 0, m, -m) \cdot I^{l, l+1} \right\} \right|^2 \quad (2.21a)$$

und

$$I^{l,l'} = I^{l,l'}(s \leq 1) + I^{l,l'}(s \geq 1),$$

$$I^{l,l'}(s \leq 1) = C_l \tilde{\alpha}_{l'}^i \int_0^1 s^3 j_l^*(B_f^i s) j_{l'}(B_i s) ds \quad (2.21b)$$

$$I^{l,l'}(s \geq 1) = \frac{1}{A_f^{*n,l} A_i} \int_1^\infty s \chi_{n,l}^*(A_f^i s) \chi_{l'}(A_i s) ds$$

Die Koeffizienten  $V$  sind wiederum die oben in Gl. (2.20) definierten Racah-Koeffizienten.  $\tilde{\alpha}_l$  sind auch oben in Gl. (2.19) definiert.  $C_l$  ist die Normierungskonstante der Wellenfunktion des Endzustandes im inneren Bereich.

### 3. Die Berechnung der Wellenfunktionen nach dem W.K.B. Verfahren

Nun wollen wir die Anfangswellenfunktion  $\psi_i(r, \vartheta, \varphi)$  nach der W.K.B. Näherung<sup>14)</sup> im Aussenbereich ( $r \geq R$ ,  $R = \text{Kernradius}$ ), wo das Coulomb-Feld herrscht, bestimmen. Legen wir die Polarachse in die Richtung des Ausbreitungsvektors und entwickeln wir nach Kugelfunktionen, so können wir die Wellenfunktion in folgender Gestalt schreiben.

$$\psi(r, \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_{\ell}' \frac{\chi_{\ell}(r)}{r} Y_{\ell,0}(\vartheta) \quad (3.1)$$

Der Radialteil  $\chi_{\ell}(r)$  der Wellenfunktion gehorcht der Wellengleichung

$$\frac{d^2 \chi_{\ell}}{dr^2} + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_i - V(r)) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \chi_{\ell} = 0 \quad (3.2)$$

Für die Rechnung ist es bequem den Abstand  $r$  des Protons vom Streuzentrum in Einheiten des Kernradius  $R$  auszudrücken, also die dimensionslose Variable  $\xi = r/R$  einzuführen und dann die umgeschriebene Wellengleichung

$$\frac{d^2 \chi_{\ell}}{d\xi^2} + A_{\ell}^2 [1 - U_{\ell}(\xi)] \chi_{\ell} = 0 \quad (3.3)$$

als Ausgangspunkt zu wählen. Im Aussenbereich des Kerns  $\xi > 1$  haben wir dann:

$$A_{\ell} = k_i R, \quad k_i^2 = 2\mu E_i / \hbar^2 \quad (3.4)$$

$$U_l(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{Ze^2}{R} \right) \cdot \frac{1}{E_i} + \frac{1}{s^2} \left( \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \right) \cdot \frac{l(l+1)}{E_i} \quad (3.4)$$

Für die allgemeine Lösung der Gl. (3.3) machen wir den Ansatz

$$\psi_i(s, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\beta}_l \frac{\chi_l(s)}{A_l s} Y_{l,0}(\vartheta) \quad (3.5)$$

$\psi_i(s, \vartheta)$  ist die im Schwerpunktsystem mit der Relativkoordinate  $s$  und dem Polarwinkel  $\vartheta$  gültige Wellenfunktion.  $\mu$  ist die reduzierte Masse und  $E_i$  die Translationsenergie. Die Umrechnung der Energie, der Geschwindigkeit, der Wellenzahl von dem Beobachtungs- auf das Schwerpunktsystem wird durch die bekannten Umrechnungsformeln geregelt<sup>(22)</sup>.

Bei der Berechnung der Wellenfunktion  $\psi_i(s, \vartheta)$  benutzen wir die folgenden Abkürzungen für die wiederholt auftretenden Grössen:

$$x = Ze^2 / \hbar v ; \quad \beta_l^2 = |1 - U_l(s)| \quad (3.6)$$

$x$  hängt in einfacher Weise mit dem "klassischen Bahnumkehrpunkt"  $s_l = r_l / R$  (vgl. Fig. 1, S24) zusammen, der sich mit Hilfe von (3.4) und (3.6) aus  $1 - U_l(s) = 0$  berechnet:

$$s_l = \frac{\chi}{R} (x + \sqrt{x^2 + l(l+1)}) ; \quad \chi = \frac{1}{k_i} \quad (3.7)$$

Mithin bedeutet grosses  $x$  geringe, und kleines  $x$  grosse Eindringtiefe des Protons in das Coulomb-Feld. Das Zentrifugalpotential  $1/s^2 \cdot (\hbar/R)^2 l(l+1)$  schiebt den Umkehrpunkt mit wachsendem  $l$  weiter nach aussen. Schliesslich sei

noch das am Kernrand herrschende Potential  $V_l$  notiert, für welches wegen Gln. (3.4) und (3.6)

$$V_l = \frac{\chi}{R} \left[ 2x + \frac{\chi}{R} l(l+1) \right] \quad (3.8)$$

gilt.

Da für die numerische Behandlung die exakte Lösung der Wellengleichung (3.3) für nur bis zum Kernrand reichendes Coulomb-Feld kompliziert ist, sollen die  $\chi_l(\xi)$  auf der Grundlage der W.K.B. Näherung berechnet werden. Dabei berechnen wir zunächst die W.K.B. Funktionen für die zum Kernrand  $\xi = 1$  reichendes Coulomb-Potential und betrachten den Kern als undurchdringlich. Die Absorption im Kern berücksichtigen wir später durch die Abänderung von Phase und Amplitude der auslaufenden Welle.  $\chi_I$  und  $\chi_{II}$  seien die den Gebieten I und II (vgl. Fig. 1) zugeordneten

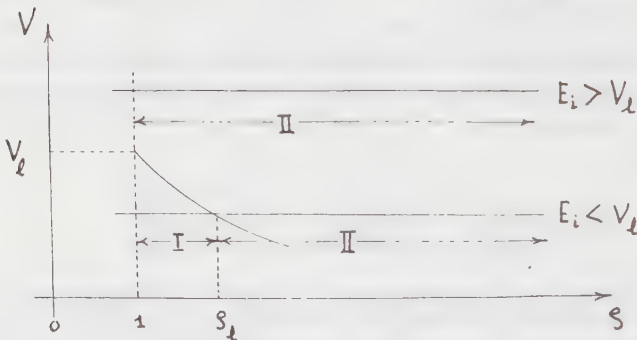


Fig. 1

Lösungen, wohingegen  $\chi$  eine Partialwelle ohne Spezial-

sierung auf einen der beiden Bereiche bedeuten möge. Ferner sind die beiden Fälle  $E_i > V_l$  und  $E_i < V_l$  zu unterscheiden, die beide in Fig. 1 eingetragen sind. Für hinreichend grosses  $l$  wird natürlich immer  $E_i < V_l$  sein. Im ersten Fall hat  $\chi_I$  Exponentialcharakter, während  $\chi_{II}$  eine oszillierende Funktion darstellt, und zwar findet man in der W.K.B. Näherung<sup>14)</sup> nach Langer für nur bis zum Kernrand reichendes Coulomb-Potential:

$$\chi_I = p_l^{-1/2} \left[ 2 \sin \varphi_l \cdot e^{+A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} + \cos \varphi_l \cdot e^{-A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} \right] \quad (3.9)$$

$$\chi_{II} = 2 p_l^{-1/2} \cos \left[ A_i \int_{s_l}^s p_l ds - \frac{\pi}{4} + \varphi_l \right]$$

mit

$$p_l = \sqrt{|1 - u_l(s)|} \quad (3.9a)$$

wobei  $\varphi_l$  die Integrationskonstante ist, und sich physikalisch als eine zusätzliche Phase wegen der Modifizierung des Coulomb-Potentials auffassen lässt. Im Fall  $E_i > V_l$  reicht die oszillierende Funktion  $\chi_{II}$  bis zum Kernrand, so dass eine Unterscheidung der Gebiete I und II gegenstandslos wird. Im folgenden werden wir die beiden Fälle nebeneinander betrachten.

Der Faktor  $p_l^{-1/2}$  verursacht das bekannte Versagen der Näherung in unmittelbarer Umgebung des Umkehrpunktes  $s_l$ . Dabei ist der Gültigkeitsbereich in der hier gewählten Schreibweise durch die Forderung

$$\left| \frac{dp_l/ds}{2A_i p_l^2} \right| = \frac{1}{4A_i} \frac{|du_l/ds|}{|1 - u_l(s)|^{3/2}} \ll 1 \quad (3.10)$$

gegeben. Der Fall  $E_1 = V_1$  bei dem der Bahnumkehrpunkt auf dem Kernrand liegt ist daher auszuschliessen.

Die Lösungen (3.9) sind allgemeiner als die meist benutzten W.K.B. Funktionen<sup>14)</sup>,

$$\chi_I = p_l^{-1/2} \cdot e^{\int_{s_l}^{s_l} -A_i p_l ds}, \quad \chi_{II} = 2 p_l^{-1/2} \cdot \cos\left(A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds - \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.11)$$

die aus Gln. (3.9) durch Spezialisierung auf  $\varphi_l = 0$  hervorgehen. Die Eigenfunktionen (3.11) sind bekanntlich Näherungslösungen des reinen bis zum Koordinatensprung reichenden Coulomb-Feldes und erfüllen dort die Randbedingung  $\chi_I(0) = 0$ . Da diese Randbedingung bei unserem Problem nicht anwendbar ist, ist Gl. (3.11) zu speziell und Gl. (3.9) angemessen.

Ferner, um das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion  $\psi_i(s, \vartheta)$  zu berücksichtigen, berechnen wir  $\chi_{II}$  für  $s \gg 1$ . Zunächst ist

$$\begin{aligned} A_i \int_{s_l}^s p_l ds &= A_i s p_l + \sqrt{l(l+1)} \left[ \arcsin \frac{x s + \frac{\chi}{R} l(l+1)}{s \sqrt{x^2 + l(l+1)}} - \frac{\pi}{2} \right] + \\ &+ x \cdot \ln \left[ \frac{\frac{\chi}{R} \sqrt{x^2 + l(l+1)}}{s - \frac{\chi}{R} x + s p_l} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Daraus folgt für  $s \gg 1$  die asymptotische Darstellung von

$$\begin{aligned} \chi_{II} \rightarrow 2 \cos \left\{ A_i s - x \ln 2 A_i s + \sqrt{l(l+1)} \left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + l(l+1)}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{2} \right] + x \left( \ln \sqrt{x^2 + l(l+1)} - 1 \right) - \frac{\pi}{4} + \varphi_l \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wird dies in Gl. (3.5) eingesetzt, so finden wir für die gesuchte asymptotische Darstellung der Wellenfunktion

$$\psi_i(\varrho, \vartheta) \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\beta}_l \frac{\sin(A_i \varrho - x \ln 2A_i \varrho + \delta_l + \varphi_l)}{A_i \varrho} Y_{l,0} \quad (3.14)$$

Dabei ist die Abkürzung

$$\delta_l = \sqrt{l(l+1)} \left[ \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + l(l+1)}} - \frac{\pi}{2} \right] + x(\ln \sqrt{x^2 + l(l+1)} - 1) + \frac{\pi}{4} \quad (3.15)$$

eingeführt. Wie beim reinen Coulomb-Feld tritt auch hier die charakteristische logarithmische Phase  $x \ln 2A_i \varrho$  im Argument der Partialwellen auf. Die Wellenfunktion ist damit bis auf die Koeffizienten  $\tilde{\beta}_l$  bekannt. Die asymptotisch dargestellte Wellenfunktion  $\psi_i(\varrho, \vartheta)$  in (3.14) soll sich von den asymptotischen Verlauf der ebenen Welle  $\exp(iA_i \varrho \cos \vartheta)$ , abgesehen von der logarithmischen Phase, nur durch die auslaufenden Wellenteile unterscheiden. Die Entwicklung der ebenen Welle nach Kugelfunktionen für grosse  $A_i \varrho$  ist

$$\exp(iA_i \varrho \cos \vartheta) \rightarrow \frac{\pi^{1/2}}{A_i \varrho} \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} \sqrt{2l+1} \left\{ \exp \left[ -i \left( A_i \varrho - \frac{1}{2} l \pi \right) \right] - \exp \left[ +i \left( A_i \varrho - \frac{1}{2} l \pi \right) \right] \right\} Y_{l,0}(\vartheta) \quad (3.16)$$

Bilden wir die Differenz, so verschwinden die einlaufenden Partialwellen dann, wenn

$$\tilde{\beta}_l = i^l \pi^{1/2} \sqrt{2l+1} \cdot \exp \left[ i \left( \delta_l + \varphi_l + \frac{1}{2} l \pi \right) \right] \quad (3.17)$$

gewählt wird.

Die Aufspaltung der Wellenfunktion  $\chi$  in aus- und einlaufende Wellenteile  $\chi^+$  und  $\chi^-$  ist für  $\chi_{II}$  durch die Aufteilung der cos-Funktion in Exponentialfunktionen sofort möglich<sup>23)</sup>. Werden diese weiter in Real- und Imaginärteil zerlegt, dann erhalten wir mit

$$\varphi_{II} = 2 p_l^{-1/2} \sin \left( A_i \int_{s_l}^s p_l ds - \frac{\pi}{4} + \varphi_l \right) \quad (3.18)$$

für die aus- und einlaufenden Wellen

$$\chi_{II}^+ = \frac{1}{2} (\chi_{II} + i \varphi_{II}); \quad \chi_{II}^- = \frac{1}{2} (\chi_{II} - i \varphi_{II}) = \chi_{II}^{+*} \quad (3.19)$$

Ebenso sei  $\chi_I$  in zwei "laufende Wellen" aufgeteilt, und zwar seien  $\chi_I^+$  und  $\chi_I^-$  derart in den Bereich I fortgesetzt, dass einmal die Kontinuität der beiden Teilchenströme gewahrt bleibt und ausserdem, wie oben  $\chi_I = \chi_I^+ + \chi_I^- = \chi_I^+ + \chi_I^{+*}$  gelten soll. Beide Forderungen erfüllt die Aufteilung

$$\begin{aligned} \chi_I = \chi_I^+ + \chi_I^- = p_l^{-1/2} \cdot e^{i\varphi_l} \left[ -i e^{A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} + \frac{1}{2} e^{A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} \right] + \\ + p_l^{-1/2} \cdot e^{-i\varphi_l} \left[ i e^{A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} + \frac{1}{2} e^{-A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

wie man leicht nachrechnet. Trennen wir wieder in Real- und Imaginärteil auf, so folgen mit

$$\varphi_I = p_l^{-1/2} \left[ -\cos \varphi_l \cdot e^{A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} + \sin \varphi_l \cdot e^{-A_i \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} \right] \quad (3.21)$$

die zu (3.18) analogen Gleichungen

$$\chi_I^+ = \frac{1}{2} (\chi_I + i Q_I) ; \quad \chi_I^- = \frac{1}{2} (\chi_I - i Q_I) \quad (3.22)$$

Die vollständige Lösung unserer Schrödinger-Gleichung (3.3), aufgespalten nach ein- und auslaufenden Wellen, lautet also

$$\psi_i(s, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\beta}_l \frac{\chi_l^- + \chi_l^+}{A_l s} Y_{l,0}(\vartheta) \quad (3.23)$$

mit

$$\tilde{\beta}_l = i^l \pi^{1/2} \sqrt{2l+1} \cdot \exp[i(d_l + \varphi_l)] \cdot \exp i \frac{1}{2} l \pi \quad (3.23a)$$

Im Gebiet I sind

$$\chi_l^- = \frac{1}{2} (\chi_I - i Q_I) ; \quad \chi_l^+ = \frac{1}{2} (\chi_I + i Q_I) = \chi_l^{-*} \quad (3.23b)$$

$$\chi_I = p_l^{-1/2} \left\{ e^{i\varphi_l} \left( \frac{1}{2} e^{-A_l \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} - i e^{+A_l \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} \right) + e^{-i\varphi_l} \left( \frac{1}{2} e^{-A_l \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} + i e^{+A_l \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} \right) \right\} ; \quad (3.23c)$$

$$Q_I = p_l^{-1/2} \left( -\cos \varphi_l \cdot e^{+A_l \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} + \sin \varphi_l \cdot e^{-A_l \int_{s_l}^{s_l} p_l ds} \right) ; \quad (3.23d)$$

und im Gebiet II analoge Ausdrücke nach (3.9) und (3.17)  
für  $\chi_l^- = \frac{1}{2} (\chi_{II} + i \varphi_{II})$  und  $\chi_l^+ = \chi_l^{-*}$ .

Nach einfachen Umrechnungen nimmt (3.23) die folgende  
Gestalt an

$$\psi_i(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \frac{\chi_l^- - e^{2i\zeta_l} \chi_l^+}{A_i \vartheta} Y_{l,0}(\vartheta) \quad (3.24)$$

wobei

$$\beta_l = i^{l+1} \pi^{1/2} \sqrt{2l+1}, \quad \zeta_l = (\delta_l + \varphi_l + \frac{1}{2} l \pi) \quad (3.24a)$$

und

$$\chi_l^\mp = \frac{1}{2} (F_l \mp i G_l) \cdot \exp \left[ \pm i \left( \delta_l + \frac{1}{2} l \pi \right) \right]. \quad (3.24b)$$

Im Gebiet I ist dann

$$F_l^I = p_l^{-1/2} \exp \left[ -A_i \int_{\xi}^{\xi_l} p_l d\xi \right], \quad G_l^I = p_l^{-1/2} \exp \left[ +A_i \int_{\xi}^{\xi_l} p_l d\xi \right] \quad (3.24c)$$

und im Gebiet II

$$F_l^{II} = 2 p_l^{-1/2} \cos \left( A_i \int_{\xi_l}^{\xi} p_l d\xi - \frac{\pi}{4} \right), \quad G_l^{II} = 2 p_l^{-1/2} \sin \left( A_i \int_{\xi_l}^{\xi} p_l d\xi - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.24d)$$

Wie man es hier leicht sieht, sind dann  $F_1$  und  $G_1$  die regulären und irregulären W.K.B. Lösungen der Schrödinger-Gl. für reines bis zum Koordinatenursprung reichendes Coulomb-Potential. Die Modifizierung im Coulomb-Potential durch das Kernpotential ist dann nur durch den Phasenfaktor  $\exp(2i\xi_1)$  der auslaufenden Welle  $\chi_1^+$  berücksichtigt. Der Anwesenheit dieses Faktors entspricht eine elastische Streuung, die nur eine Phasenänderung in der auslaufenden Welle hervorruft. Findet eine Absorption im Kern statt, dann haben wir beim Glied  $\chi_1^+$  den Koeffizienten  $\eta_1$ , eine komplexe Zahl, die wegen Absorption  $|\eta_1|^2 < 1$  ist, hinzuzufügen. Dieser Faktor berücksichtigt dann die Abänderung der Phase so wie die Amplitude der auslaufenden Welle. Im Grenzfall, wo es keine Absorption gibt, ist  $|\eta_1|^2 = 1$  und  $\eta_1$  selbst der reine Phasenfaktor  $\exp(2i\xi_1)$ .

Nun lautet also unsere Wellenfunktion wie folgt:

$$\psi_i(s, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \frac{\chi_l^- - \eta_l \chi_l^+}{A_l s} Y_{l,0}(\vartheta). \quad (3.25).$$

#### 4. Numerische Ergebnisse

Um mit den experimentellen Ergebnissen von Cohen<sup>2)</sup> an  $\text{Ni}^{60}$  ( $p, \gamma$ )  $\text{Cu}^{61}$  (s. Tab. 2 und Fig. 3), so wie mit denen von Gugelot<sup>3)</sup> an  $\text{Cu}^{63,65}$  ( $p, \gamma$ )  $\text{Zn}^{64,66}$  (s. Fig. 2) vergleichen zu können, führen wir nun die Berechnungen nach den im vorigen Abschnitt entwickelten Ausdrücken für  $\text{Ni}^{60}$  durch. Da die explizite Abhängigkeit der Massenzahl nach Gln. (2.18) und (2.21) lediglich im Faktor  $R^5$  besteht, können wir unsere Ergebnisse auch für die benachbarten Massenzahlen, nach einer Korrektur nur in diesem Faktor, mit den experimentellen Resultaten vergleichen, ohne die erheblichen numerischen Berechnungen, die für die Bestimmung der Wellenfunktionen nötig sind, zu wiederholen.

Der Wirkungsquerschnitt ist für die Einfallsteilchenenergie im Bereich von  $10 \text{ MeV} \leq E_i \leq 20 \text{ MeV}$  berechnet. Der reelle Teil der Kernwechselwirkung ist nicht unabhängig von dieser Energie<sup>15)</sup>. Jedoch verwenden wir dafür den meist benützten Mittelwert von 42 MeV. Der imaginäre Teil  $W$  des Kernpotentials ist ziemlich stark von der Beschussenergie abhängig und nimmt mit zunehmender Einfallsenergie zu<sup>15)</sup>. Für  $W$  haben wir die Werte von Vegt und Junker<sup>25)</sup> im Bereich  $4 \text{ MeV} \leq W \leq 10 \text{ MeV}$  benützt. Diese Werte entsprechen der Einfallsenergie 10 bis 20 MeV. Der Kernradius wird durch die aus Streudaten bekannte Formel

$$R = (1,2 A^{1/3} + 0,7) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

bestimmt. In der Tabelle 1 sind alle diese Daten zusammengestellt.

Der Gang der Rechnung ist folgender: Zunächst müssen die Streuamplituden  $\eta_l$ , berechnet

Tabelle 1

$$R = (1,2 A^{1/3} + 0,7) \cdot 10^{-13} \text{ cm.} = 5,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

$$V(r) = E_1 + V_0(1 + i \zeta) = V_1 + iW$$

$$E_1 = 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad \text{MeV}$$

$$V_0 = 42 \quad \text{MeV}$$

$$V_1 = 52 \quad 54 \quad 56 \quad 58 \quad 60 \quad 62 \quad \text{MeV}$$

$$W = 4 \quad 5,2 \quad 6,4 \quad 7,6 \quad 8,8 \quad 10 \quad \text{MeV}$$

$$\zeta = 0,1 \quad 0,12 \quad 0,15 \quad 0,18 \quad 0,21 \quad 0,24$$

werden. Diese Grösse  $\eta_l$  lässt sich nun nach einer elementaren Rechnung durch die am Kernrand berechnete logarithmische Ableitung von  $\chi_{\text{inn}}$  und  $\chi_{\text{aus}}^+ = \chi_{\text{aus}}^{-*}$  und durch die Phase von  $\chi_l(s) |_{s=1}$  ausdrücken<sup>18)</sup>. Diese Formeln gelten für alle Werte  $S \gg 1$ . Aber wir setzen insbesondere

$S=1$ , da unsere Schrödinger-Gleichung an der Stelle

$S=1$  d- h. am Kernrand eine Unstetigkeit besitzt, weil das Potential dort springt.

Wir führen also die Grössen

$$f_l^{\pm} = \left[ \frac{d\chi_l/ds}{\chi_l} \right]_{s=1}; \quad f_l^{\pm} = f_l^{\mp *} = \left[ \frac{d\chi_l^{\pm}/ds}{\chi_l^{\pm}} \right]_{s=1} \quad (4.1)$$

ein und setzen, wie üblich

$$f_l^{\pm} = \Delta_l \pm i\delta_l \quad (4.2)$$

mit reellen  $\Delta_l$  und  $\delta_l$ . Die Phase  $\xi_l$  von  $\chi_l^-(s)$  am Kernrand ist definiert durch

$$\exp(2i\xi_l) = \left[ \frac{\chi_l^-(s)}{\chi_l^+(s)} \right]_{s=1} \quad (4.3)$$

Die Grössen  $\frac{1}{t_l}^{\pm}$  und  $\xi_l$  sind durch die äussere Wellenfunktion bestimmt. Nach Gln. (2.6) und (4.1) ist nämlich für  $E_i > V_1$

$$\Delta_l = -\frac{a+2b_l}{4M_l} ; \quad \delta_l = A_i M_l^{1/2} ; \quad (4.2a)$$

$$a = \frac{ze^2}{RE_i} , \quad b_l = \frac{\hbar}{2\mu R^2} \cdot \frac{l(l+1)}{E_i} , \quad (4.2b)$$

$$\exp(2i\xi_l) = \exp \left[ -2i \left( A_i \int_{s_l}^1 k_l ds - \delta_l - \frac{1}{2} l\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (4.3a)$$

und für  $E_i < V_1$

$$\Delta_l = -\frac{a+2b_l}{4M_l} - A_i M_l^{1/2} \frac{4 - e^{-4\tilde{\gamma}}}{4 + e^{-4\tilde{\gamma}}} , \quad (4.2c)$$

$$\delta_l = 4A_i M_l^{1/2} / (4e^{2\tilde{\gamma}} + e^{-2\tilde{\gamma}}) ,$$

$$\exp(2i\xi_l) = \frac{e^{-4\tilde{\gamma}} - 4 + i4e^{-2\tilde{\gamma}}}{4 + e^{-4\tilde{\gamma}}} \cdot \exp \left\{ 2i \left[ \delta_l + \frac{\pi}{2} (l-1) \right] \right\} \quad (4.3b)$$

mit

$$\tilde{y} = A_i \int_1^{s_l} p_l ds$$

Die Parameter  $f_l$  dagegen sind durch das Kerninnere gegeben. So folgt aus Gln. (2.8) und (4.1)

$$f_l = 1 + \frac{B_i}{2l+1} \cdot \frac{l j_{l-1}(B_i) - (l+1) j_{l+1}(B_i)}{j_l(B_i)} \quad (4.4)$$

Nun sind wir in der Lage den Zusammenhang zwischen  $\eta_l$  und der logarithmischen Ableitung  $f_l$  an der Kernoberfläche auszudrücken. Wie man aus Gln. (4.1) bis (4.4) leicht nachrechnet, ist dann

$$\eta_l = \frac{f_l - \Delta_l + i s_l}{f_l - \Delta_l - i s_l} \cdot \exp(2i \xi_l) \quad (4.5)$$

Den oben gegebenen Formeln nach sind die berechneten Werte der verschiedenen Parameter  $\Delta_l$ ,  $s_l$  und  $\xi_l$  so wie  $\eta_l$  für den Anfangszustand, in Tabellen (3) und (4) dargestellt. Die  $\delta_l$  haben wir aus der Gl. (3.15) berechnet.

Jetzt kann man die Amplitude  $\tilde{\mathcal{L}}_l$  für die beiden Fälle  $E_i < V_1$  und  $E_i > V_1$  bestimmen. Zu diesem Zweck benutzen wir die Stetigkeitsbedingung der Wellenfunktion am Kernrand  $B = 1$ . Dann gilt für jedes  $l$ , für  $E_i > V_1$ ,

$$\tilde{\mathcal{L}}_l = \frac{e^{-i\tilde{I}_l} - \eta_l e^{+i\tilde{I}_l}}{A_i B_i j_l(B_i) M_l^{1/4}} \quad (4.6a)$$

mit

$$I_1 = A_i \int_{s_l}^{s=1} p_l ds - s_l - \frac{1}{2} l \pi + \frac{\pi}{4} \quad (4.6b)$$

und für  $E_i < V_1$ ,

$$\tilde{\alpha}_l = \frac{e^{i\tilde{x}} \left( \frac{1}{2} e^{-2\tilde{y}} + i e^{+2\tilde{y}} \right) - \eta_l e^{-i\tilde{x}} \left( \frac{1}{2} e^{-2\tilde{y}} - i e^{+2\tilde{y}} \right)}{A_i B_i M_l^{1/4} j_l(B_i)} \quad (4.7a)$$

mit

$$\tilde{x} = s_l + (l-1) \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \tilde{y} = A_i \int_1^{s_l} p_l ds \quad (4.7b)$$

Die numerischen Ergebnisse für  $\tilde{\alpha}_l^{\text{in}}$  sind in Tabelle (4) zusammengestellt.

Zur Berechnung des Gamma-Energiespektrums für den Übergang ins Kontinuum betrachten wir den einzigen Übergang zum Niveau  $E_f = 3_{\text{MeV}}$ .

Für diesen Endzustand sind die Parameter  $\Delta_l, s_l, \xi_l$  und  $f_l$  so wie auch  $\eta_l$  und  $\tilde{\alpha}_l$  nach der gleichen Methode wie für den Anfangszustand berechnet und in Tabelle (6) zusammengefasst.

Wie wir schon festgestellt haben (s. S.12), verliert die Rechnung für wesentlich kleinere Gamma-Energien, die kleiner als  $1/2 (E_i + E_B)$  sind, wegen der Vernachlässigung der Kaskadenprozesse, ihre Zweckmässigkeit. Das allgemeine

Verhalten der Funktion  $\sigma(E_f)$  wird aus der Gl. (2.17) sichtbar. Da der Faktor  $\sum |g_{i,m}|^2$  schwach energieabhängig ist, erhalten wir bei festen  $E_i$

$$\frac{d\sigma(p, \gamma)}{dE_\gamma} \propto E_\gamma^3 \cdot (E_i - E_\gamma)^{1/2} \quad (4.8)$$

Der qualitative Verlauf dieser Funktion ist in Fig. (5) dargestellt und hat bei  $E_\gamma = 5/6 E_i$  ein Maximum.

Für die Übergänge in diskrete Zustände haben wir zuerst die Energieeigenwerte für ein Kastenpotential zu bestimmen. Fig. (5) zeigt schematisch die diskreten Niveaus mit und ohne Spin-Bahnkopplung, mit den dazugehörigen Energien. Diese Energieeigenwerte der diskreten Niveaus mit Spin-Bahnkopplung verwenden wir in der Berechnung der energieabhängigen Faktoren wie  $B_f^{n,l}$  in die Endzustandswellenfunktion, um die Übergangsmatrixelemente für die Übergänge zu diesen Niveaus bestimmen zu können.

Die in Gl. (2.13b) vorkommenden Normierungskonstanten  $C_l$  so wie die Amplituden  $D_l$  der Aussenwellenfunktion für die verschiedenen  $l$ -Werte sind in Tabelle (8) eingetragen.

Nun können wir das Energiespektrum nach Gln. (2.18) und (2.21) berechnen. Da wir ein Kastenpotential für die Kernwechselwirkung verwendet haben, spaltet sich automatisch die Integrationsgrenze für das Matrixelement in zwei Teile, nämlich  $\xi > 1$  und  $\xi < 1$ . Dabei ist  $\xi = 1$  der Radius des Kastenpotential. Infolgedessen wird das Integral

$$I^{l,l'} = I^{l,l'}(\xi < 1) + I^{l,l'}(\xi > 1), \quad (4.9)$$

wobei für die Übergänge in diskrete Zustände

$$I^{l,l'}(s < 1) = C_l^* \tilde{\alpha}_l^{in} \int_0^1 s^3 j_l^*(B_f s) j_{l'}(B_i s) ds, \quad (4.9a)$$

$$I^{l,l'}(s > 1) = \frac{1}{A_f^{n,l} A_i} \int_1^\infty s \chi_l^*(A_f s) \chi_{l'}(A_i s) ds \quad (4.9b)$$

sind. Entsprechendes gilt auch für die Übergänge ins Kontinuum.

Aus diesen Formeln haben wir  $I^{l,l'}(s < 1)$  und  $I^{l,l'}(s > 1)$  für verschiedene diskrete Zustände berechnet. Die numerischen Ergebnisse für den Übergang von Anfangszustand  $E_i = 20$  MeV sind in Tabelle (9) angegeben. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass das Integral im Aussenbereich den grössten Teil zu dem Wirkungsquerschnitt beigetragen hat.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt  $\frac{d^2\sigma}{dE_f d\theta_f}$  bzw.  $d\sigma(t, \gamma)/d\theta_f$  für  $\theta_f = 90^\circ$  ist im Fig. (5) aufgetragen. Um einen besseren Vergleich mit dem Experiment von Gugelot zu ermöglichen, haben wir die Übergänge in diskreten Zuständen durch einen stetigen Kurvenverlauf ersetzt (s. Fig. 6). Dazu bildet man  $E_\gamma < E_f < E_\mu$ ,

$$\left[ \frac{1}{E_\mu - E_\gamma} \cdot \frac{d\sigma(t, \gamma)}{d\theta_f} \right]_{\theta_f = 90^\circ} \approx \left[ \frac{\frac{d^2\sigma(t, \gamma)}{dE_f d\theta_f}}{\theta_f = 90^\circ} \right] \quad (4.10)$$

wobei  $\mu$  und  $\gamma$  die diskreten Zustände der Reihe nach durchnummeriert. Die so erhaltene Rechteckkurve ist dann einfach durch eine stetige Kurve interpoliert.

Die oben geschilderte Berechnung wurde auch für die Energien  $E_i = 10$  MeV und 14 MeV durchgeführt, ohne jedoch den Übergang ins Kontinuum zu berücksichtigen. Aus der Summation der Übergänge in die einzelnen diskreten Niveaus ergibt sich dann der totale Einfangsquerschnitt. Das Ergebnis ist als Funktion der Beschussenergie in Fig. 7 aufgetragen. Darunter haben wir auch den Einfangsquerschnitt bei Vernachlässigung der Integrale  $I^{l,l'}(s > 1)$ , d. h. nur den inneren Beitrag, aufgetragen. Dazu haben wir noch den Einfangsquerschnitt nach dem Statistischen Modell (nach Beck) eingezeichnet. Der gesamte Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann durch die Summation der Einteilchen- und Compound-Kernmodell-Beiträge.

Auf dieser Fig. (7) sieht man, dass der gesamte Wirkungsquerschnitt für den Einfang des Protons mit einer Beschussenergie von 20 MeV bei  $Ni^{60}$  etwa 0,3 mb beträgt. Bei der Vernachlässigung des Aussenbeitrags ist der Querschnitt nur noch etwa 0,1 mb.

## 5. Vergleich mit den Experimenten und Diskussion

Das stetige Gamma-Energiespektrum gewonnen nach Gl. (4.10) ist in Fig. (6) graphisch dargestellt. Dessen Vergleich mit der experimentellen Kurve Gugelots (s. Fig. 2) zeigt kaum eine quantitative, jedoch eine <sup>gewisse</sup> qualitative Übereinstimmung, was nach unseren vereinfachenden Annahmen zu erwarten war. Die beiden Maxima, die in unserem berechneten Spektrum auftreten, entsprechen der Gruppierung der Niveaus in der 50-er bzw. 82-er Schale und treten im experimentellen Verlauf andeutungsweise wieder auf. Das experimentelle Spektrum ist mit einem Gamma-Spektrometer relativ schlechten Auflösungsvermögens erhalten. Das Auflösungsvermögen hängt von der Grösse des Spektrometer-Einkristalls ab. Für die hier auftretenden Gamma-Energien benötigt man bereits sehr grosse Kristalle, was eine bessere Untersuchung erschwert.

Ferner zeigt das schematisch aufgetragene Niveaudia-gram in Fig. (4), dass der sich aus dem Experiment für den Einfang des Protons ergebende Wert für die Bindungsenergie, nämlich  $E_B = 10$  MeV mit dem berechneten übereinstimmt.

Im niederenergetischen Teil des Spektrums ( $E, \leq E_1$ ) ergibt sich eine ziemlich grosse Diskrepanz. Die berechnete Kurve zeigt das für Bremsstrahlung charakteristische Maximum (vgl. Gl. 4.8), während nach den Experimenten von Gugelot der Wirkungsquerschnitt mit klein werdenden Gamma-Energien monoton und ziemlich stark zunimmt. Wahrscheinlich sind die Kaskadenprozesse in diesem Energiebereich nicht mehr vernachlässigbar. Für die Proton-Reaktionen sind diese Folgeprozesse besonders bedeutend, weil das Proton nach dem ersten Übergang zum nächsten Energiezustand durch die Coulomb-Barriere sehr stark am Verlassen des Kerns gehindert wird.

In Fig. (7) sind die hier berechneten so wie die gemessenen Werte für Einfangsquerschnitte von Cohen zum Vergleichszwecken, aufgetragen. Nach unseren Berechnungen sind die Einfangsquerschnitte für den Einfang des Protons mit Anregungsenergien von 10, 14 und 20 MeV im Kern  $\text{Ni}^{60}$  etwa 0,2, 0,2 und 0,3 mb. Dagegen sind die experimentellen Werte 0,9, 0,7 und 0,8 mb.

Der Berechnung der Übergangsmatrixelemente zeigen, dass die Beiträge zur Wirkungsquerschnitte hauptsächlich vom Aussenbereich ( $\xi \gg 1$ ) herrühren. In Tabellen (9), (10) und (11) haben wir diese, entsprechend Einfallsenergien 20, 14 und 10 MeV für die Beiträge im Aussen- so wie im Innenbereich zusammengestellt. Daraus ist es deutlich zu sehen, dass der Anteil des Aussenbereichs ( $\xi \gg 1$ ) zum Wirkungsquerschnitt am meisten beigetragen hat. Wenn man die Integrale für  $\xi \gg 1$  vernachlässigt, bekommt man für den Einfangsquerschnitt bei 20 MeV den geringeren Wert von etwa 0,1 mb.

Es sei noch bemerkt, dass der Hauptanteil im Integral  $I^{l,l'}$  vom Aussenbereich, wo es keine Absorption geben kann, herrührt, obwohl wir ein optisches Modell für den Kern verwendet haben. Die Integrale für den Aussenbereich sind nur durch die Stetigkeitsbedingung am Kernrand modellabhängig, daher sollte dieser Beitrag von dem gewählten Modell ziemlich unabhängig sein.

Da der Wirkungsquerschnitt nach der Compound-Kerntheorie mit zunehmender Einfallsenergie rasch abnimmt (s. Fig. 3 u. 7), können wir annehmen, dass ein Grenzwert der Energie existiert, nach dessen Überschreitung der direkte Einfangsquerschnitt dominiert. Infolgedessen sollte der Hauptanteil des gemessenen Einfangsquerschnitts über einigen MeV dem Beitrag des

direkten Einfangsquerschnitts zuzuschreiben sein. Wie man in Fig. 7 deutlich sieht, spielt der Compound-Anteil von Beschussenergie 15 MeV an keine merkliche Rolle mehr. Der rasche Abfall der Compound-Strahlung mit zunehmender Einfallenergie wird von dem Einteilchenbeitrag kompensiert. Der gesamte Wirkungsquerschnitt ergibt sich durch die Summation der Einteilchen- und Compound-Kern-Wirkungsquerschnitte. Die so erhaltene theoretischen Werte für Wirkungsquerschnitt liegen jedoch um etwa einen Faktor 3 tiefer als die gemessenen.

An Stelle des viel realistischeren "Wood-Saxon Potentials", haben wir das einfache Kastenpotential als eine wesentliche Vereinfachung verwendet. Es ist verständlich, dass durch eine Abrundung der Potentialecken der Wirkungsquerschnitt etwas zunehmen wird. Am Kernrand ( $\xi = 1$ ) werden weniger Teilchen reflektiert, so dass die Anzahl der Teilchen, die in den Kern eintreten, vergrößert wird. Deswegen nimmt der Wert der Integrale  $I_{l,l}^{1,2}$  ( $\xi < 1$ ) zu. Wegen der Coulomb-Abstossung ausserhalb des Kerns wird jedoch die Zunahme in diesem Energiebereich gering sein, ausser eventuell für leichtere Elemente. Natürlich wird für abgerundetes Potential die Stelle  $\xi = 1$ , welche die Grenze zwischen Aussen- und Innenbereich bildet, ungenau nach Massgabe der Oberflächendicke. Trotzdem wird der Hauptbeitrag vom Bereich ausserhalb des "Mittelpunktes" der Potentialwand herrühren.

Aus Gl. (2.21) ersieht man, dass der direkte Einfangsquerschnitt mit zunehmender Beschussenergie ebenfalls zunimmt. Eine solche Zunahme ist nicht möglich, weil die l-Werte für gebundene Zustände beschränkt sind. Für eine Potentialtopftiefe von 42 MeV, kann man die zugelassenen l durch  $(1 + 1) \approx R \cdot 10^{13}$  abschätzen<sup>18)</sup>. Folglich wird der Einfangsquerschnitt von dieser Energieabhängigkeit für solche Energien abweichen, die höher liegen als diejenigen, für welche die Partialwelle  $l' = R \cdot 10^{13}$  noch bis zum Kern-

rand gelangt. Aus der Relation  $\ell' \leq k'R$  gewinnt man dann als Wert für diese Energiegrenze etwa 22 MeV für sämtliche Kerne. Aufgrund dieses Effekts erwarten wir eine Abnahme des Einfangquerschnitts für grössere Energien als 22 MeV.

Ferner sei noch darauf hingewiesen, dass der Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit nach der Blatt-Weisskopfschen klassischen Strahlungstheorie<sup>18)</sup>, den wir hier verwendet haben, dann gültig ist, wenn die lineare Dimension der Strahlungsquelle klein gegenüber der Strahlungswellenlänge ist. Diese Bedingung ist für den hier betrachteten Kern und dessen Gamma-Energiespektrum nicht ganz erfüllt. Im hochenergetischen Bereich ( $E_\gamma = 30$  MeV) verursacht diese Näherung einen Fehler von etwa 20 % im massgebenden Bereich des äusseren Beitrags für den Kern Cu<sup>61</sup>. D. H. unsere Untersuchungen und Ergebnisse in diesem Energiebereich gelten nur für leichte und mittelschwere Kerne.

Für die Untersuchung der Strahlungsübergänge der schweren Kerne muss man die strengere Form der Blatt-Weisskopfschen klassischen Strahlungstheorie verwenden. Lane und Lynn haben jedoch für ihre Abschätzungen für Kerne schwerer als Pb ( $R = 8 \cdot 10^{-13}$  cm) die angenäherte Form der Blatt-Weisskopfschen Theorie benützt. Diese verursacht, am Kernrand selbst, eine Abweichung im Dipol-Operator von etwa 20 % und im massgebenden Bereich des äusseren Beitrags mehr als 50 %. Diese Abweichungen führen zu grossen Ungenauigkeiten in den Berechnungen der Einfangwirkungsquerschnitte.

Herrn Professor Dr. F. Beck möchte ich für den Hinweis auf das dieser Arbeit zugrunde liegende Problem so wie für viele anregende Diskussionen herzlich danken. Herrn Professor Dr. F. Bopp danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit. Ferner bin ich Herrn Dr. Kastrup für klärende Diskussionen sehr verpflichtet.

Mein Dank gebührt ausserdem dem Indischen Erziehungsministerium, Delhi, dem Deutschen Akademischen Austauschdienst, Bonn, und dem Bayerischen Kultusministerium, München für gewährte Stipendien.

## 6. Literaturverzeichnis

- 1) N. Bohr, Nature 137, 344 (1936); Science 86, 161 (1947).
- 2) B.L. Cohen, Phys. Rev. 100, 206 (1955).
- 3) P.C. Gugelot, „Report on Brookhaven Conference on statistical Aspects of the Nucleus; und private Mitteilung (citirt in Ref. 13).
- 4) F. Beck, Physica 22, 1164 (1956).
- 5) V.F. Weisskopf, Rev. Mod. Phys. 29, 174 (1957).
- 6) E. Kelly, UCRL-1044 (1950), (nicht veröffentlicht).
- 7) Gemmel, Morton u. Smith, Nucl. Phys. 10, 45 (1959);  
Gemmel, Norton u. Titterton, Nucl. Phys. 10, 33 (1959).
- 8) F.M. Medina u. G. Süßmann, Fortschritte d. Phys. IV, 297 (1956).
- 9) A.M. Lane u. C.F. Wandel, Phys. Rev. 98, 1524 (1955);  
Proceedings of Int. Conf. on Nuclear Optical Modell,  
Florida State Univ., Tallhassee, Florida (1959).
- 10) B. Kursunoglu, Phys. Rev. 105, 1846 (1957).
- 11) A.M. Lane u. Lynn, Nucl. Phys. 11, 646 (1959).
- 12) W. Tobocman, „Theory of Direct Nuclear Reactions“,  
Oxford Univ. Press (1961).
- 13) F. Beck, Nucl. Phys. 2, 140 (1958/59).
- 14) S. Flügge u. H. Marschall, „Rechenmethoden der Quantentheorie“, Springer Verlag (1952); R.E. Langer, Phys. Rev. 51, 669 (1937); W.H. Furry, Phys. Rev. 71, 360 (1947);  
P.M. Morse u. H. Feshbach, „Methods of Theoretical Physics“, McGraw-Hill, N.Y. (1953).
- 15) R.D. Woods u. D.S. Saxon, Phys. Rev. 95, 577 (1954).
- 16) N.F. Mott u. H.S. Massey, „Theory of Atomic Collisions“, Oxford (1950).
- 17) J. Horowitz u. A.M.L. Messiah, J. phys. et radium 14, 695 (1953); J.A. Lamarsh u. H. Feshbach, Phys. Rev. 104, 1633 (1956); C.A. Levinson u. M.K. Banerjee, Ann. Phys. 2, 471 (1957).

- 18) J.M. Blatt u. V.F. Weisskopf, „Theoretical Nuclear Physics“, Wiley & Sons, N.Y. (1952).
- 19) G. Breit u. H.A. Bethe, Phys. Rev. 93, 888 (1955);  
H.A. Bethe u. L.C. Maximon, Phys. Rev. 93, 768 (1955).
- 20) H.A. Bethe, Handbuch der Physik, Bd. XXIV/1, Anhang  
über „Spherical Harmonics“, (1933).
- 21) M.G. Mayer u. J.H.D. Jensen, „Elementary Theory of  
Nuclear Shell Modell“, Wiley & Sons, N.Y. (1955).
- 22) L. Schiff, „Quantum Mechanics“, McGraw-Hill Book Co.,  
N.Y. (1949).
- 23) W. Pauli, Handbook der Physik, Bd. XXIV/1 (1933).
- 24) V.F. Weisskopf, H. Feshbach u. D.C. Peaslee, Phys. Rev.  
71, 145 (1947); s. auch Ref.8.
- 25) Van d. Vegt u. C.C. Jonker, Physica XXIII, 359(1957),  
( vgl. Ref. 9 ).

7. Tabellen und Figuren

Tab. 2. - Experimentell gemessene Wirkungsquerschnitte für  
(p,  $\gamma$ ) Reaktionen.

| Reaktion                                           | Proton-Energie<br>in MeV | Wirkungsquer-<br>schnitte in mb |
|----------------------------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| $\text{Li}^7(\text{p}, \gamma)\text{Be}^8$         | 6                        | $0,14 \pm 0,047)$               |
| $\text{B}^{11}(\text{p}, \gamma)\text{C}^{12}$     | 7,2                      | $0,27 \pm 0,057)$               |
| $\text{C}^{12}(\text{p}, \gamma)\text{N}^{13}$     | 5                        | $2,5^{(2)}$                     |
|                                                    | 11                       | 1,8                             |
| $\text{F}^{19}(\text{p}, \gamma)\text{Ne}^{20}$    | 7,7                      | $0,85 \pm 0,27)$                |
| $\text{Na}^{23}(\text{p}, \gamma)\text{Mg}^{24}$   | 7,7                      | $0,14 \pm 0,047)$               |
| $\text{Al}^{27}(\text{p}, \gamma)\text{Si}^{28}$   | 7,7                      | $0,19 \pm 0,057)$               |
| $\text{P}^{31}(\text{p}, \gamma)\text{S}^{32}$     | 7,7                      | $0,05 \pm 0,027)$               |
| $\text{Fe}^{54}(\text{p}, \gamma)\text{Co}^{55}$   | 11                       | $0,33^{(2)}$                    |
| $\text{Ni}^{60}(\text{p}, \gamma)\text{Cu}^{61}$   | 10                       | $0,9^{(2)}$                     |
|                                                    | 16                       | 0,7                             |
|                                                    | 21                       | 0,9                             |
|                                                    | 22,5                     | 0,9                             |
| $\text{Zn}^{64}(\text{p}, \gamma)\text{Ca}^{65}$   | 8                        | $1,3^{(2)}$                     |
|                                                    | 11                       | 1,2                             |
| $\text{Bi}^{209}(\text{p}, \gamma)\text{Po}^{210}$ | 10                       | $0,17^{(6)}$                    |
|                                                    | 15                       | 0,63                            |
|                                                    | 20                       | 0,43                            |
|                                                    | 22,5                     | 0,26                            |

Tab. 3. - Numerische Werte der verschiedenen Parameter  $\Delta_l$ ,  $s_l$ ,  $f_l$  und  $\delta_l$  des Anfangszustandes.

| $l$ | $E_i$ MeV | $\Delta_l$ | $s_l$ | $f_l^{Re}$ | $f_l^{Im}$ | $\delta_l$ |
|-----|-----------|------------|-------|------------|------------|------------|
| 0   | 10        | -0,83      | +1,8  | -5,08      | - 4,04     | -0,13      |
|     | 12        | -0,44      | +2,5  | -6,04      | - 6,24     | -0,17      |
|     | 14        | -0,30      | +2,98 | -6,49      | -8,81      | -0,19      |
|     | 16        | -0,22      | +3,4  | -5,88      | -11,63     | -0,21      |
|     | 18        | -0,18      | +3,78 | -3,37      | -13,71     | -0,21      |
|     | 20        | -0,16      | +4,12 | -0,80      | -14,42     | -0,21      |
| 1   | 10        | -----      | ----- | +7,72      | - 5,11     | -0,75      |
|     | 12        | -0,92      | +2,05 | +5,51      | - 5,04     | -0,83      |
|     | 14        | -0,54      | +2,62 | +4,01      | - 5,06     | -0,89      |
|     | 16        | -0,37      | +3,09 | +2,82      | - 5,24     | -0,94      |
|     | 18        | -0,28      | +3,5  | +1,86      | - 5,99     | -0,98      |
|     | 20        | -0,24      | +3,89 | +1,21      | - 6,66     | -1,01      |
| 2   | 10        | -3,32      | +1,06 | -8,66      | - 6,9      | -1,71      |
|     | 12        | -----      | ----- | -8,04      | -10,7      | -1,83      |
|     | 14        | -2,04      | +1,67 | -5,83      | -13,9      | -1,93      |
|     | 16        | -1,02      | +2,35 | -2,55      | -15,4      | -2,01      |
|     | 18        | -0,64      | +2,88 | +0,36      | -14,0      | -9,07      |
|     | 20        | -0,51      | +3,33 | +1,64      | -12,6      | -2,13      |
| 3   | 10        | -3,86      | +0,71 | +1,77      | - 2,34     | -2,84      |
|     | 12        | -3,56      | +1,22 | +0,79      | - 3,02     | -2,99      |
|     | 14        | -3,93      | +1,27 | -0,09      | - 3,65     | -3,13      |
|     | 16        | -----      | ----- | -0,84      | - 4,4      | -3,23      |
|     | 18        | -3,76      | +1,51 | -1,21      | - 5,54     | -3,31      |
|     | 20        | -1,72      | +2,25 | -1,37      | - 6,58     | -3,39      |
| 4   | 10        | -4,85      | +0,02 | +7,9       | - 5,6      | -3,97      |
|     | 12        | -4,61      | +0,57 | +7,34      | - 6,22     | -4,32      |
|     | 14        | -4,37      | +0,9  | +5,81      | - 6,94     | -4,46      |
|     | 16        | -4,13      | +1,22 | +4,18      | - 7,53     | -4,58      |
|     | 18        | -4,06      | +1,51 | +2,62      | - 8,2      | -4,62      |
|     | 20        | -4,29      | +1,71 | +1,44      | - 9,12     | -4,72      |

Tab. 4 - Numerische Werte der Parameter  $\exp(2i\xi_l)$ ,  $\eta_l$  und  $|\tilde{\alpha}_l|^2$  für Anfangszustand.

| $l$ | $E_i$<br>MeV | $\exp(2i\xi_l)$ |       | $\eta_l^{\text{Re}}$ | $\eta_l^{\text{Im}}$ | $ \tilde{\alpha}_l ^2$ |
|-----|--------------|-----------------|-------|----------------------|----------------------|------------------------|
|     |              | Re              | Im    |                      |                      |                        |
| 0   | 10           | -0,76           | -0,65 | -0,64                | -0,17                | 10,4                   |
|     | 12           | -0,99           | +0,13 | -0,57                | +0,33                | 5,0                    |
|     | 14           | -0,68           | +0,74 | -0,26                | +0,58                | 21,8                   |
|     | 16           | -0,04           | +0,99 | +0,12                | +0,61                | 27,6                   |
|     | 18           | +0,58           | +0,81 | +0,40                | +0,43                | 13,4                   |
|     | 20           | +0,95           | +0,3  | +0,54                | +0,15                | 3,86                   |
| 1   | 10           | -----           | ----- | +0,92                | +0,1                 | -----                  |
|     | 12           | +0,73           | -0,69 | +0,69                | -0,26                | 12,3                   |
|     | 14           | +0,17           | -0,98 | +0,38                | -0,43                | 17,2                   |
|     | 16           | -0,44           | -0,90 | +0,07                | -0,43                | 12,2                   |
|     | 18           | -0,88           | -0,47 | -0,19                | -0,28                | 5,1                    |
|     | 20           | -0,99           | +0,06 | -0,29                | -0,09                | 2,1                    |
| 2   | 10           | -0,27           | +0,82 | -0,36                | -0,74                | 21,7                   |
|     | 12           | -----           | ----- | -----                | -----                | -----                  |
|     | 14           | -0,89           | +0,45 | -0,73                | -0,32                | 21,3                   |
|     | 16           | -0,93           | +0,36 | -0,68                | +0,29                | 11,0                   |
|     | 18           | -0,47           | +0,88 | -0,33                | +0,57                | 29,4                   |
|     | 20           | -0,06           | +0,99 | -0,02                | +0,59                | 23,6                   |
| 3   | 10           | -0,94           | -0,35 | -0,77                | -0,49                | 8,6                    |
|     | 12           | -0,97           | +0,23 | -0,78                | -0,11                | 14,5                   |
|     | 14           | -0,73           | +0,68 | -0,67                | +0,28                | 13,1                   |
|     | 16           | -----           | ----- | -----                | -----                | -----                  |
|     | 18           | +0,41           | +0,86 | +0,2                 | +0,6                 | 14,4                   |
|     | 20           | +0,76           | +0,66 | +0,32                | +0,37                | 9,75                   |
| 4   | 10           | +0,98           | -0,09 | +0,74                | -0,36                | 2,2                    |
|     | 12           | +0,76           | -0,61 | +0,65                | -0,62                | 3,4                    |
|     | 14           | +0,27           | -0,98 | +0,32                | -0,74                | 4,7                    |
|     | 16           | -0,48           | -0,89 | -0,28                | -0,66                | 3,1                    |
|     | 18           | -0,84           | -0,47 | -0,54                | -0,33                | 2,3                    |
|     | 20           | -0,94           | +0,07 | -0,61                | +0,18                | 1,1                    |

Tab. 5 - Zusammenfassung der numerischen Werte der Parameter für den Anfangszustand  $E_i = 20$  MeV.

| $l$ | $E_i$<br>MeV | $\text{Re}$ | $\exp(2i\zeta_l)$ | $\text{Im}$ | $\delta_l$ | $\eta_l^{\text{Re}}$ | $\eta_l^{\text{Im}}$ | $\chi_l^{\text{Re}}$ | $\chi_l^{\text{Im}}$ |
|-----|--------------|-------------|-------------------|-------------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0   | 20           | +0,95       | +0,3              |             | -0,214     | +0,54                | +0,15                | -1,703               | -0,978               |
| 1   | 20           | -0,99       | +0,06             |             | -1,01      | -0,29                | -0,09                | +0,023               | +1,438               |
| 2   | 20           | -0,06       | -0,98             |             | -2,13      | -0,02                | +0,59                | -2,371               | -4,246               |
| 3   | 20           | +0,76       | +0,66             |             | -3,39      | +0,32                | +0,37                | -2,869               | +1,23                |
| 4   | 20           | +0,02       | +0,99             |             | -4,72      | -0,61                | +0,18                | +0,174               | -1,041               |
| 5   | 20           | -0,88       | +0,46             |             | -6,37      | -0,23                | -0,08                | +0,097               | -0,23                |

Tab. 6 - Numerische Werte der verschiedenen Parameter  $\Delta_l, \beta_l, f_l, \exp(i\delta_l^*), \eta_l$  und  $|\tilde{\alpha}_l|^2$  für den Endzustand  $E_f = 3 \text{ MeV}$ .

| $l$ | $E_i$<br>MeV | $\Delta_l$ | $\beta_l$          | $f_l^{\text{Re}}$ | $f_l^{\text{Im}}$ | $\exp(i\delta_l^*)$<br>$\text{Re}$ | $\text{Im}$        | $\delta_l$ | $\eta_l^{\text{Re}}$ | $\eta_l^{\text{Im}}$ | $ \tilde{\alpha}_l ^2$ |
|-----|--------------|------------|--------------------|-------------------|-------------------|------------------------------------|--------------------|------------|----------------------|----------------------|------------------------|
| 0   | 3            | -2,95      | +0,04              | -0,04             | -2,16             | +0,23                              | +0,96              | +0,68      | +0,2                 | -0,96                | $0,59^4$               |
| 1   | 3            | -3,34      | +0,02              | +11,84            | -22,42            | -0,82                              | -0,58              | +0,31      | -0,81                | +0,58                | $0,01^8$               |
| 2   | 3            | -3,99      | +0,00 <sup>5</sup> | -2,87             | -2,37             | +0,77                              | -0,63 <sup>5</sup> | -0,34      | +0,77                | +0,63                | $0,08^8$               |
| 3   | 3            | -4,77      | +0,01              | +6,35             | -3,05             | +0,74                              | +0,68              | -1,2       | +0,74                | -0,68                | $0,08^2$               |
| 4   | 3            | -5,63      | +0,02              | -13,15            | -13,6             | -0,31                              | +0,95              | -2,19      | -0,32                | -0,95                | $0,01^4$               |

Tab. 7 - Numerische Werte der Integrale  $I_{\ell, \ell'}$  für den Übergang vom Anfangszustand  $E_i = 20 \text{ MeV}$  zum Endzustand  $E_f = 3 \text{ MeV}$  ins Kontinuum

| $\lambda$ | $\alpha_{\lambda}^{\text{in}}$ |        | $ \alpha_{\lambda}^f ^2$ |       | $I_{\lambda, \lambda-1}^{+3} \times 10^3$ |       | $I_{\lambda, \lambda+1}^{+3} \times 10^3$ |        |
|-----------|--------------------------------|--------|--------------------------|-------|-------------------------------------------|-------|-------------------------------------------|--------|
|           | Re                             | Im     |                          |       | Re                                        | Im    | Re                                        | Im     |
| 0         | -1,703                         | -0,978 | 0,594                    | ..... | .....                                     | ..... | 2,749                                     | -1,184 |
| 1         | +0,023                         | +1,438 | 0,018                    | 1,095 | 1,095                                     | 2,566 | 2,013                                     | 2,326  |
| 2         | -2,371                         | -4,246 | 0,082                    | 2,274 | 2,274                                     | 2,50  | -2,143                                    | -2,498 |
| 3         | -2,869                         | +1,23  | 0,088                    | 1,859 | 1,859                                     | 2,318 | 4,204                                     | 1,792  |
| 4         | +0,174                         | -1,041 | 0,014                    | 1,559 | 1,559                                     | 2,577 | 2,498                                     | 2,143  |
| 5         | +0,01                          | 0,072  | 0,01                     | 1,195 | 1,195                                     | 2,366 | 2,037                                     | 1,892  |

Tab. 8 - Numerische Werte der Parameter  $C_{l,j}$  und  $D_{l,j}/C_{l,j}$  für die diskreten Zustände

| $E_f$<br>MeV | Zustand   | $ C_{l,j} ^2$         | $D_{l,j}/C_{l,j}$ |
|--------------|-----------|-----------------------|-------------------|
| -10,0        | 2 p $3/2$ | $2,85 \times 10^{38}$ | -0,565            |
| - 9,4        | 1 f $5/2$ | $5,65 \times 10^{38}$ | +0,184            |
| - 8,8        | 2 p $1/2$ | $3,75 \times 10^{38}$ | -0,498            |
| - 7,8        | 1 g $9/2$ | $2,8 \times 10^{38}$  | +0,686            |
| - 2,4        | 1 g $7/2$ | $1,54 \times 10^{38}$ | +0,325            |
| - 1,8        | 2 d $5/2$ | $0,69 \times 10^{38}$ | -0,368            |

Tab. 9 - Numerische Ergebnisse für  $I^{l,l'}(s < 1)$  und  $I^{l,l'}(s > 1)$  für den Übergang vom Anfangszustand  $E_i = 20 \text{ MeV}$  zu den diskreten Zuständen

| $E_f$<br>MeV | Zustand    | $I^{l,l'+1}(s < 1) \times 10^3$ |       | $I^{l,l'+1}(s > 1) \times 10^3$ |       | $I^{l,l'-1}(s < 1) \times 10^3$ |       | $I^{l,l'-1}(s > 1) \times 10^3$ |       | $\frac{ I^{l,l'}(s > 1) ^2}{ I^{l,l'}(s < 1) ^2}$ |                    |
|--------------|------------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------|-------|---------------------------------------------------|--------------------|
|              |            | Re                              | Im    | Re                              | Im    | Re                              | Im    | Re                              | Im    | $\frac{l'+1}{l=l+1}$                              | $\frac{l'}{l=l-1}$ |
| -10,0        | $2p_{3/2}$ | -3,26                           | -5,25 | -4,84                           | +5,48 | +3,32                           | +2,75 | +1,73                           | -7,23 | 1,4                                               | 18,5               |
| -9,4         | $1f_{5/2}$ | +0,21                           | -1,73 | -1,58                           | +1,79 | -1,36                           | +0,89 | -0,56                           | +2,36 | 1,88                                              | 2,24               |
| -8,8         | $2p_{1/2}$ | -2,97                           | -5,53 | -4,26                           | +4,84 | -2,72                           | -1,42 | +1,57                           | -6,41 | 1,12                                              | 4,66               |
| -7,8         | $1g_{9/2}$ | +1,66                           | +3,55 | -4,87                           | +5,66 | -4,42                           | +2,1  | +2,11                           | -4,78 | 3,64                                              | 1,15               |
| -2,4         | $1g_{7/2}$ | -0,1                            | -0,34 | +0,66                           | +0,32 | +0,71                           | -1,81 | +2,54                           | -0,16 | 4,3                                               | 1,74               |
| -1,8         | $2d_{5/2}$ | +4,23                           | -1,17 | -7,52                           | -5,68 | +0,37                           | -1,11 | -0,82                           | +2,03 | 4,63                                              | 3,48               |

Tab. 10 - Numerische Ergebnisse für  $I^{l,l'}(\xi < 1)$  und  $I^{l,l'}(\xi > 1)$  für den Übergang vom Anfangszustand  $E_i = 14 \text{ MeV}$  zu den diskreten Zuständen

| $E_f$<br>MeV | Zustand    | $I^{l,l+1}(\xi < 1) \cdot 10^{+3}$ |       | $I^{l,l+1}(\xi > 1) \cdot 10^{+3}$ |       | $I^{l,l-1}(\xi < 1) \cdot 10^{+3}$ |       | $I^{l,l-1}(\xi > 1) \cdot 10^{+3}$ |       | $ I^{l,l'}(\xi > 1) ^2 /  I^{l,l'}(\xi < 1) ^2$ |            |
|--------------|------------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|------------------------------------|-------|-------------------------------------------------|------------|
|              |            | Re                                 | Im    | Re                                 | Im    | Re                                 | Im    | Re                                 | Im    | $l' = l+1$                                      | $l' = l-1$ |
| -10,0        | $2p_{3/2}$ | +0,38                              | -1,51 | -7,76                              | -3,92 | -0,96                              | -3,51 | -4,28                              | -5,36 | 30,0                                            | 3,56       |
| -9,4         | $1f_{5/2}$ | -0,21                              | -1,11 | +1,44                              | -0,75 | +0,68                              | -0,92 | -1,28                              | +2,55 | 2,13                                            | 6,21       |
| -8,8         | $2p_{1/2}$ | +2,13                              | -3,68 | -6,33                              | -2,94 | -2,85                              | -3,87 | -3,38                              | -4,13 | 2,68                                            | 1,23       |
| -7,8         | $1g_{9/2}$ | +0,86                              | -1,78 | +2,67                              | +1,84 | -3,24                              | -1,05 | -6,99                              | -0,52 | 2,7                                             | 4,25       |
| -2,4         | $1g_{7/2}$ | -0,78                              | -0,43 | -2,6                               | +2,84 | +3,54                              | +0,16 | +7,57                              | -2,09 | 18,6                                            | 4,9        |
| -1,8         | $2d_{5/2}$ | +5,23                              | -2,17 | +9,37                              | -4,51 | +2,37                              | -1,13 | +3,72                              | -2,66 | 3,36                                            | 3,03       |

Tab. 11 - Numerische Ergebnisse für  $I^{l,l'}(q < 1)$  und  $I^{l,l'}(q > 1)$  für den Übergang vom Anfangszustand  $E_i = 10 \text{ MeV}$  zu den diskreten Zuständen

| $E_f$<br>MeV | Zustand    | $I^{l,l'}(q < 1) \times 10^{+3}$ |       | $I^{l,l'}(q > 1) \times 10^{+3}$ |       | $I^{l,l'}(q < 1)$ |       | $I^{l,l'}(q > 1)$ |       | $\frac{ I^{l,l'}(q > 1) ^2}{ I^{l,l'}(q < 1) ^2}$ |            |
|--------------|------------|----------------------------------|-------|----------------------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|---------------------------------------------------|------------|
|              |            | Re                               | Im    | Re                               | Im    | Re                | Im    | Re                | Im    | $l' = l+1$                                        | $l' = l-1$ |
| -10,0        | $2p_{3/2}$ | +3,21                            | +2,25 | +5,62                            | -7,06 | -3,96             | -6,51 | -2,94             | +8,25 | 5,3                                               | 1,32       |
| -9,4         | $1f_{5/2}$ | +0,19                            | -1,23 | -1,19                            | -0,16 | -1,26             | +0,92 | +0,63             | -2,69 | 0,93                                              | 3,16       |
| -8,8         | $2p_{1/2}$ | +3,88                            | +1,24 | -1,49                            | +7,77 | -2,75             | -3,41 | +4,48             | -6,77 | 3,8                                               | 3,58       |
| -7,8         | $1g_{9/2}$ | -0,16                            | -1,85 | +2,16                            | -6,65 | +2,21             | +1,05 | +8,61             | +2,03 | 14,3                                              | 13,1       |
| -2,4         | $1g_{7/2}$ | -1,33                            | -0,68 | -4,32                            | -7,39 | +0,69             | -1,82 | +9,42             | -6,05 | 32,2                                              | 31,4       |
| -1,8         | $2d_{5/2}$ | -4,22                            | +2,27 | -4,09                            | +8,12 | +0,39             | +1,09 | +0,24             | -0,76 | 3,6                                               | 2,2        |

b) Figuren.

Fig.2 - Experimentelles  $\gamma$ -Spektrum der Reaktion  $\text{Cu}^{63,65}(p, \gamma) \text{Zn}^{64,66}$  für Einfallsp protonenenergie von 18 MeV nach P.C.Gugelot.<sup>3)</sup>

Fig.3 - Wirkungsquerschnitt  $\sigma(p, \gamma)$  als Funktion der Beschussenergie  $E_1$  nach Beckschen Abschätzungen<sup>13)</sup> im statistischen Modell sowie der experimentelle Wirkungsquerschnitt der Reaktion  $\text{Ni}^{60}(p, \gamma) \text{Cu}^{61}$  nach Tab.1.

Fig.4 - Schematische Darstellung der Einteilchen-Niveaus mit dazugehörigen Energieeigenwerte. Es sind die Schalenmodell-Niveaus des Grundzustands sowie der angeregten Zustände für den einfallenden Proton mit und ohne (in Fig. rechts und links) Spin-Bahnkopplung eingetragen.

Fig.5 - Theoretische  $(p, \gamma)$  Wirkungsquerschnitte für die Übergänge ins Kontinuum ( $E_\gamma < 20$  MeV) und in die gebundenen Zustände ( $E_\gamma > 20$  MeV) bei Proton-Einfallenergie von 20 MeV. Berechnet dabei im Kontinuum ist nur der Wert für  $E_\gamma = 17$  MeV.

Fig.6 - Berechnetes  $\gamma$ -Spektrum der Fig.5 nach der im Text (s. S. 38) angegebenen Weise aufgelöst.

Fig.7 - Berechnete Werte des Proton-Einfangquerschnitts als Funktion der Beschussenergie. Der Beitrag der Compound-Kernstrahlung wurde nach Beckschen Ergebnissen für  $\sigma(n, \gamma)$  im statistischen Modell unter Berücksichtigung der Coulombabstößung abgeschätzt.

Fig. 2.

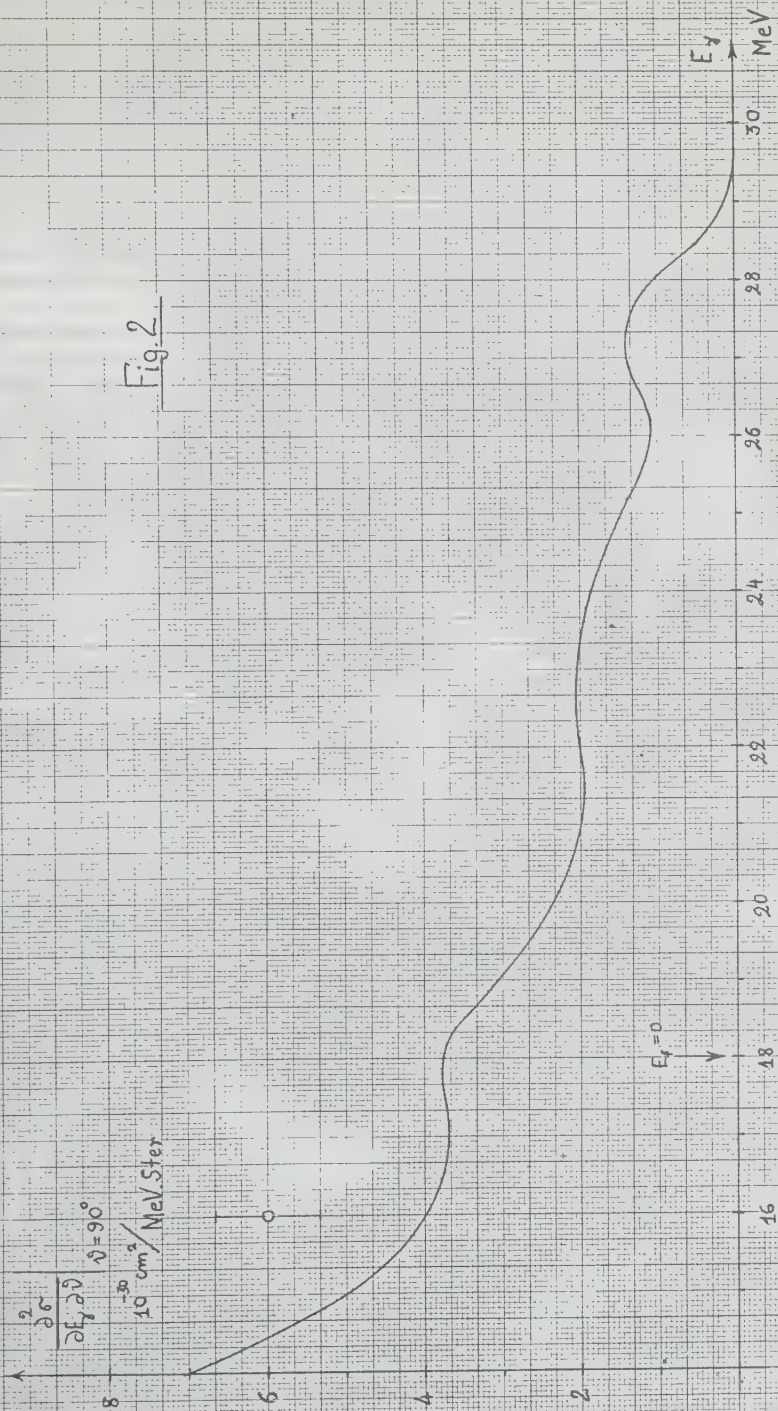
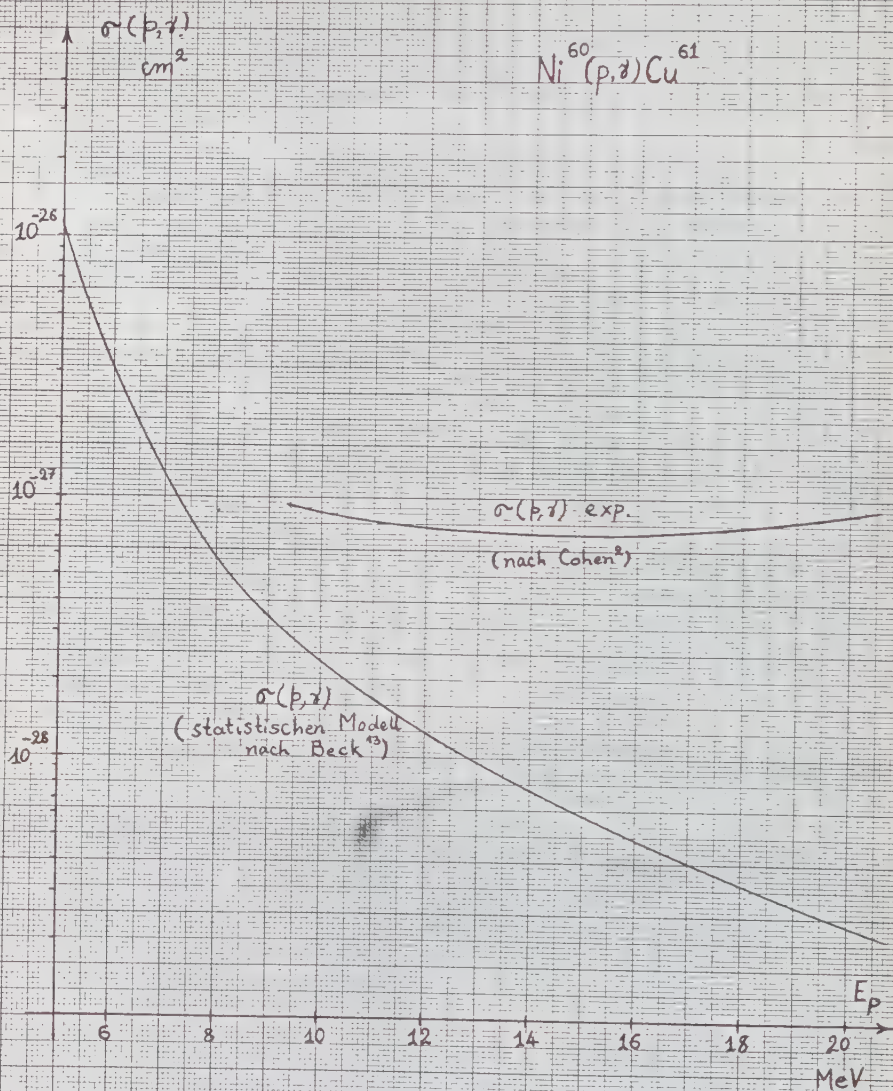


Fig. 3



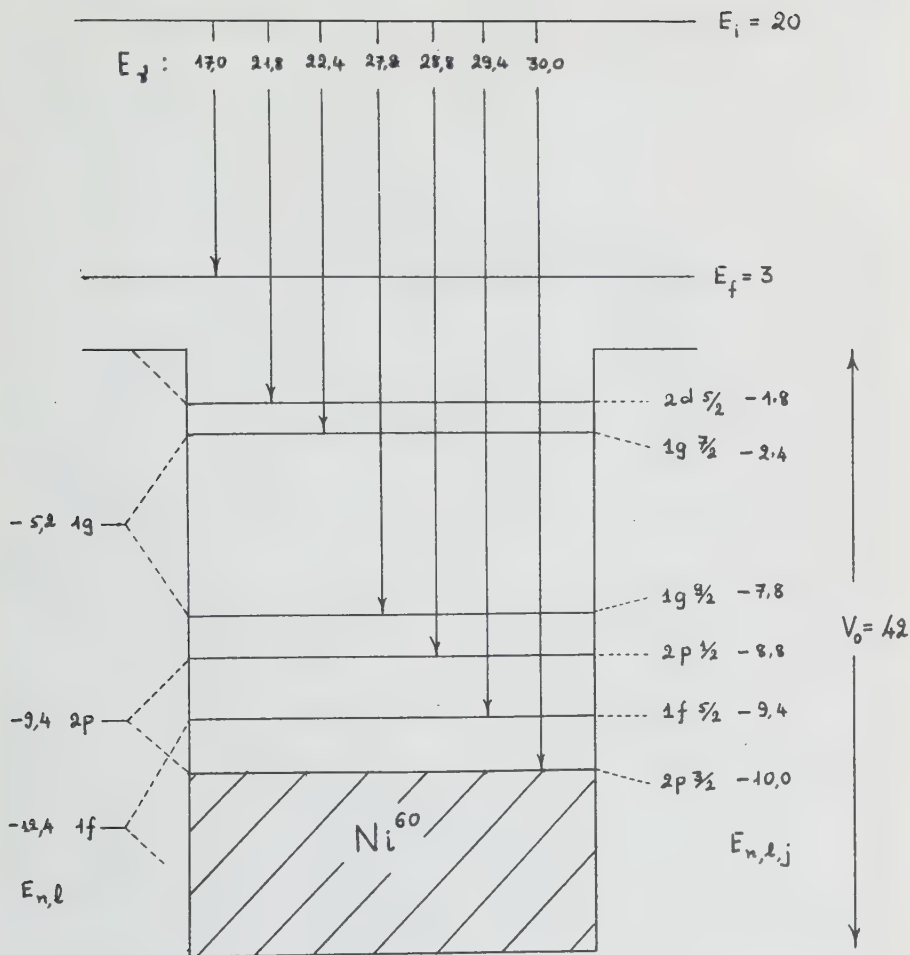


Fig. 4

Alle Energieangaben sind in MeV. Der entsprechende Radius ist  $R = (1,2 A^{1/3} + 0,7) 10^{-13} \text{ cm}$ .

Fig. 5

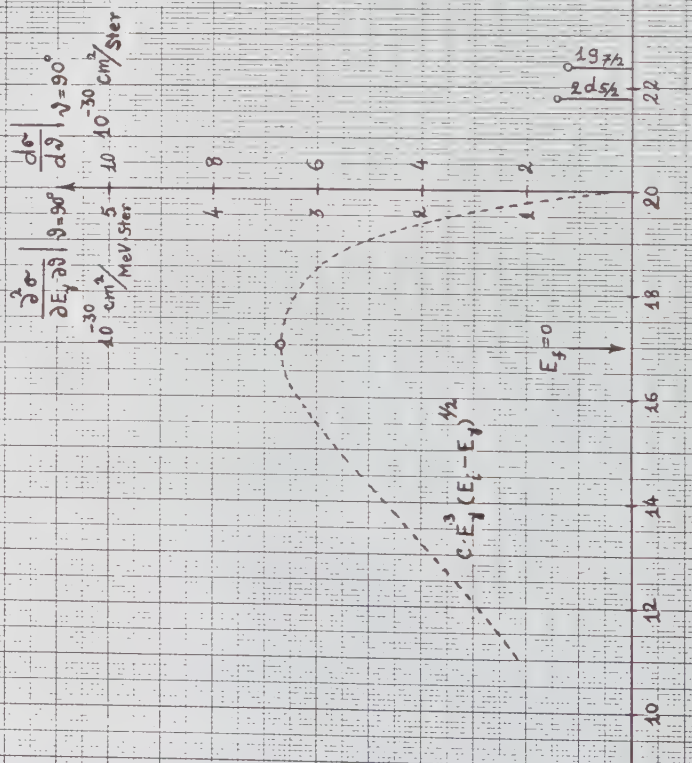
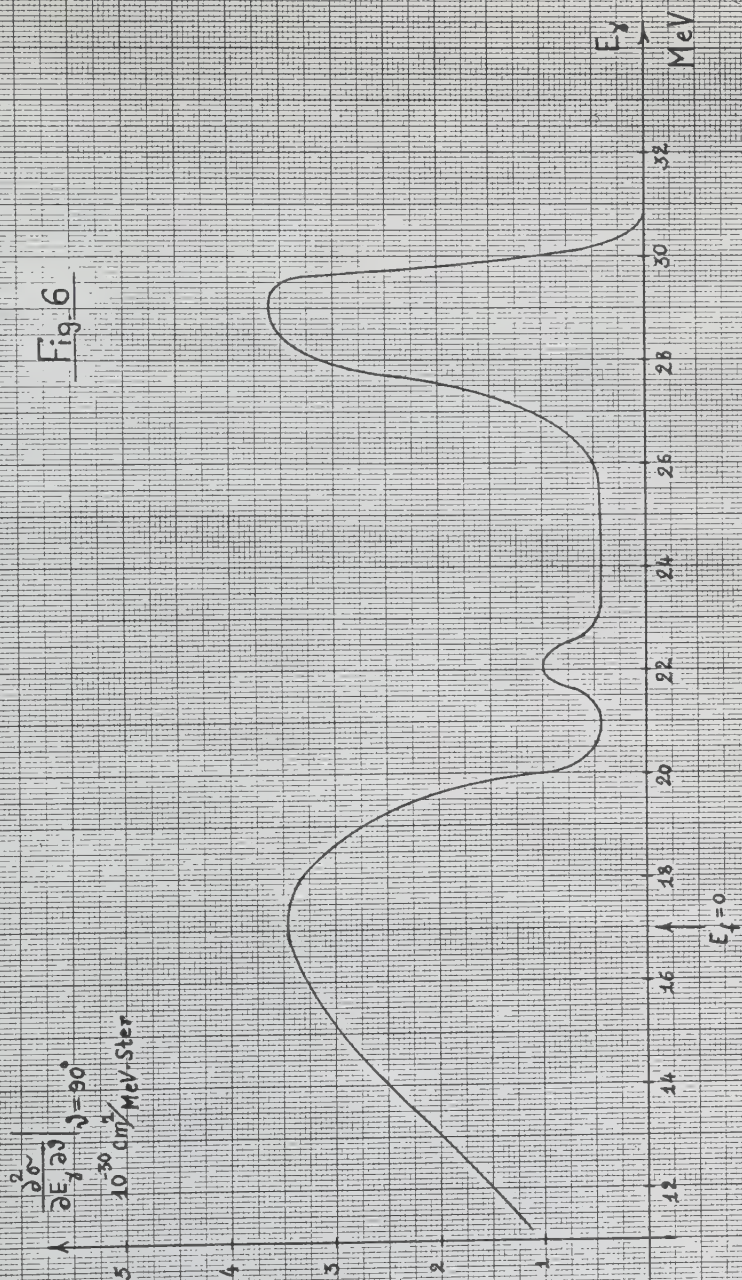


Fig. 6



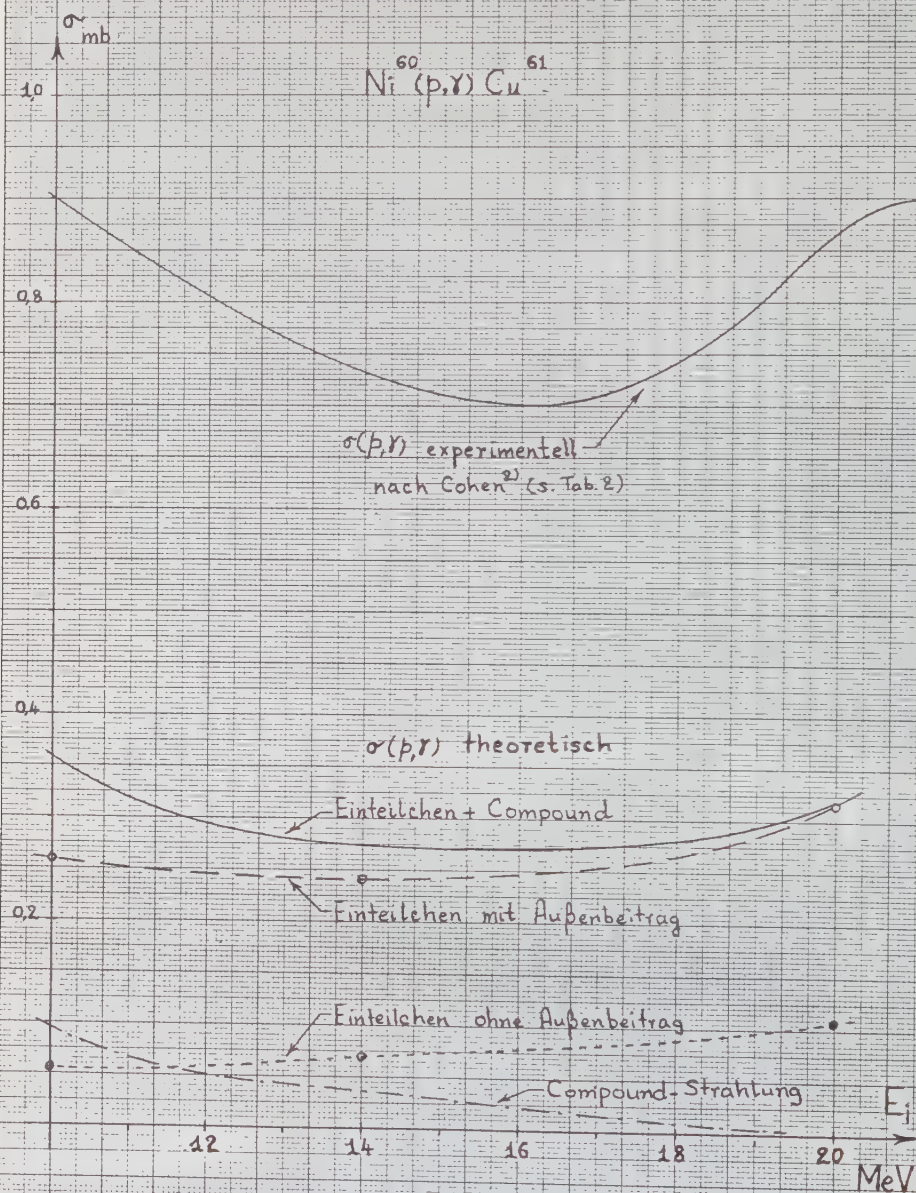


Fig 7

### Lebenslauf

Am 9 Oktober 1932 wurde ich in Poona, Indien, als Sohn des Rechtsanwälters Kaluram M. Urankar und dessen Ehefrau Tarabai geboren. Bis 1947 besuchte ich die Schule „Modern Highschool“ in Poona. Nach meiner Abschlussprüfung (Matriculation) studierte ich am „Fergusson College“ der Universität Poona. Hier machte ich meinen „B. Sc. Degree“ in Physik und Mathematik. Dann wechselte ich zur Elektrotechnik am „College of Engineering“ der Universität Poona und erwarb nach dreijährigen Studium im 1954 den Grad des „Bachelor of Engineering“.

Anschliessend kam ich nach München um am Institut für theoretische Physik unter Prof. F. Bopp Kernphysik zu studieren. Seit 1957 bin ich unter Anleitung von Prof. F. Beck mit der Abfassung meiner Doktorarbeit beschäftigt.





